Prüfung zur Systemtheorie und Regelungstechnik I, Universität Freiburg, SoSe 2015 (Prof. Dr. M. Diehl)

Mikroklausur 1 am 13.5.2015

Übungsgruppe: 1 ☐ Lukas Klar | 2 ☐ Johanna Becker | 3 ☐ Louis Findling | 4 ☐ Stephan Christian

Name: Matrikelnummer: Punkte: / 9

Füllen Sie bitte Ihre Daten ein und machen Sie jeweils genau ein Kreuz bei der richtigen Antwort. Sie dürfen Extrapapier für Zwischenrechnungen nutzen, aber bitte geben Sie am Ende nur dieses Blatt ab. Richtige Antworten zählen 1 Punkt, falsche -1/3 Punkt, keine oder mehrere Kreuze 0 Punkte.

1. Multiplizieren Sie $a = -3 + j$ und $b = 2 - 2j$. Das Ergebnis ist gegeben durch:

(a) ☐ $-5 - 3j$	(b) [x] $-4 + 8j$	(c) ☐ $-1 - j$	(d) ☐ $-6 - 2j$

$$(-3 + j) \cdot (2 - 2j) = -6 + 2j + 6j - 2j^2 = -6 + 8j - 2(-1) = -4 + 8j$$

2. Dividieren Sie $a = 2e^{2\pi j}$ durch $b = 8e^{-\pi j}$. Das Ergebnis ist gegeben durch:

(a) ☐ $\frac{1}{4}e^{\pi j}$	(b) ☐ $4e^{3\pi j}$	(c) [x] $\frac{1}{4}e^{3\pi j}$	(d) ☐ $4e^{\pi j}$

$$\frac{2e^{2\pi j}}{8e^{-\pi j}} = \frac{1}{4}e^{2\pi j}e^{\pi j} = \frac{1}{4}e^{3\pi j}$$

3. Bestimmen Sie das Produkt $A \cdot x$ von $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ und $x = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(a) ☐ $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$	(b) ☐ $\begin{bmatrix} -1 \\ -5 \end{bmatrix}$	(c) ☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	(d) [x] $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \\ -2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

4. Multiplizieren Sie die beiden Matrizen A_1 und A_2 mit $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ und $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(a) [x] $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$	(b) ☐ $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$	(c) ☐ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	(d) ☐ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Wie lautet der Imaginärteil von $e^{(at+jbt)}$?

(a) [x] $e^{at} \cdot \sin(bt)$	(b) ☐ e^{jbt}	(c) ☐ $e^{bt} \cdot \sin(at)$	(d) ☐ $e^{a} \cdot j \cdot \sin(bt)$

$$e^{(at+jbt)} = e^{at}e^{jbt} = e^{at}(\cos(bt) + j \cdot \sin(bt)) = e^{at}\cos(bt) + j \cdot e^{at}\sin(bt)$$

6. Ein elektrischer Oszillator wird durch die beiden DGLs $\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{C}$ und $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{L}(v_E - iR - v_C)$ beschrieben. Nehmen Sie $x = \begin{bmatrix} i \\ v_C \end{bmatrix}$ als Zustand und $u = v_E$ als Eingang. Bringen Sie das System in die Form $\dot{x} = Ax + Bu$. Geben Sie A und B an.

(a) ☐ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix}$	(b) ☐ $A = \begin{bmatrix} -1/L & 0 \\ -R/L & 1/C \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix}$
(c) [x] $A = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}$	(d) ☐ $A = \begin{bmatrix} 1/C & -R/L \\ 0 & -1/L \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \mathrm{d}i/\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v_C/\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/C \cdot i + 0 \cdot v_C + 0 \cdot v_E \\ -R/L \cdot i - 1/L \cdot v_C + 1/L \cdot v_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} u$$

7. Der Flückiger See hat die Temperatur T. Durch die Sonne wird jeden Tag die Wärmemenge Q hinzugefügt. Durch den konstant kühlen Boden (Temperatur T_0) wird dem See Wärme entzogen. Die Temperatur des Sees wird über die Gleichung $\dot{T} = k_1 \cdot Q - k_2 \cdot (T - T_0)$ beschrieben. Wie groß ist die Temperatur T_{ss}, die sich bei konstantem Q_{ss} einstellt?

(a) ☐ $\frac{Q_{\mathrm{ss}} + k_1 \cdot T_0}{k_2}$	(b) ☐ $k_1 \cdot Q_{\mathrm{ss}} + T_0 \cdot k_2$	(c) ☐ $\frac{k_2 \cdot Q_{\mathrm{ss}} + T_0}{k_1}$	(d) [x] $\frac{k_1 \cdot Q_{\mathrm{ss}}}{k_2} + T_0$

$$f(x_{\mathrm{ss}}, u_{\mathrm{ss}}) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow k_1 \cdot Q_{\mathrm{ss}} - k_2 \cdot (T_{\mathrm{ss}} - T_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow T_{\mathrm{ss}} = \frac{k_1 \cdot Q_{\mathrm{ss}}}{k_2} + T_0$$

8. Welche Lösung $x(t)$ hat die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = u(t) - x(t)$ mit dem Anfangswert $x(0) = 1$?

(a) ☐ $e^{-t} + e^{t} \int_0^t u(\tau) d\tau$	(b) ☒ $e^{-t} + e^{-t} \int_0^t e^{\tau} u(\tau) d\tau$
(c) ☐ $u(t) + \int_0^t x(\tau) d\tau$	(d) ☐ $1 + e^{u(t)}$

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) \mathrm{d}\tau \text{ mit } A = -1, B = 1, x_0 = 1$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-t} + \int_0^t e^{-t} e^{\tau} u(\tau) \mathrm{d}\tau = e^{-t} + e^{-t} \int_0^t e^{\tau} u(\tau) \mathrm{d}\tau$$

9. Der Traktor aus der Vorlesung wird durch die beiden Differentialgleichungen $\dot{x}_1 = V\cos(x_2)$ und $\dot{x}_2 = \frac{V}{L}\tan(u)$ beschrieben. Hierbei ist x_1 die X-Koordinate und x_2 der Orientierungswinkel des Traktors. Die Y-Koordinate sei in diesem Beispiel nicht von Interesse. Linearisieren Sie das System in der Gleichgewichtslage $u_{\mathrm{ss}} = 0$ und $x_{\mathrm{ss}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. Bringen Sie das linearisierte System in die Form $\dot{x} = Ax + Bu$, indem Sie A und B angeben.

(a) ☒ $A = \begin{bmatrix} 0 & -V \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ V/L \end{bmatrix}$	(b) ☐ $A = \begin{bmatrix} V/L & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ V\cos(1) \end{bmatrix}$
(c) ☐ $A = \begin{bmatrix} V/L & 0 \\ o & V \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	(d) ☐ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ -V/L \end{bmatrix}$

$$f(x,u) = \begin{bmatrix} V\cos(x_2) \\ \frac{V}{L}\tan(u) \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_{\mathrm{ss}}, u_{\mathrm{ss}}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_{\mathrm{ss}}, u_{\mathrm{ss}}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_{\mathrm{ss}}, u_{\mathrm{ss}}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_{\mathrm{ss}}, u_{\mathrm{ss}}) \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(x_{\mathrm{ss}}, u_{\mathrm{ss}}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(x_{\mathrm{ss}}, u_{\mathrm{ss}}) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -V\sin(x_{\mathrm{ss}2}) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -V) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{V}{L\cos^2(x_{\mathrm{ss}2})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{V}{L} \end{bmatrix}$$