Vorlesung Systemtheorie und Regelungstechnik I (SR1)
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg – Sommersemester 2015

Übungsblatt 3: Linearisierung und LTI Systeme
(Abgabe am 15.5.2015 um 8:15 im Vorlesungs-Hörsaal)

Prof. Dr. Moritz Diehl, Dr. Jörg Fischer und Lukas Klar

1. Gegeben sei ein Waschbecken mit Zufluss $u(t)$ und Wassermenge $x(t)$, das durch die ODE

$$\dot{x}(t) = u(t) - k\sqrt{x(t)}$$

modelliert wird. Betrachten Sie eine feste Flussrate u_{ss} und kleine Abweichungen $\delta u(t)$ davon.

   (a) Berechnen Sie den Gleichgewichtszustand x_{ss}. (1 Punkt)

   (b) Linearisieren Sie das System im Gleichgewichtszustand, um eine ODE der folgenden Form zu erhalten. (2 Punkte)

$$\delta\dot{x}(t) = A\ \delta x(t) + B\ \delta u(t).$$

   (c) Nehmen Sie nun an, dass $k = 0.60\sqrt{\mathrm{kg}}$/s und $u_{\mathrm{ss}} = 2.4$ kg/s. Berechnen Sie x_{ss}, A, und B. (1 Punkt)

   (d) Betrachten Sie nun das erweiterte Waschbecken mit der Wassertemperatur $x_2(t)$, das durch die ODE

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -k_1\sqrt{x_1(t)} + u(t) \\ -k_2(x_2(t) - T_0) + \frac{T_{\mathrm{h}} - x_2(t)}{x_1(t)} u(t) \end{bmatrix}$$

   beschrieben wird. Führen Sie die Schritte a) bis c) erneut durch unter der Annahme, dass $T_{\mathrm{h}} = 340\,\mathrm{K}, T_0 = 300\,\mathrm{K}$, $k_1 = 0.60\sqrt{\mathrm{kg}}/\mathrm{s}, k_2 = 0.1\frac{1}{\mathrm{s}}$ und $u_{\mathrm{ss}} = 2.4\,\mathrm{kg/s}$. (4 Punkte)

2. Betrachten Sie einen elektrischen Schaltkreis, der aus einer Spule mit Induktivität L und einem in Reihe geschalteten Kondensator mit Kapazität C besteht. Nehmen Sie an, dass Sie die Eingangsspannung u zwischen Spuleneingang und Kondensatorausgang von außen vorgeben (also steuern) können.

   (a) Entscheiden Sie sich für geeignete Zustände x und leiten Sie eine Differentialgleichung der Form $\dot{x} = f(x, u)$ her, die das Verhaltens des Stroms $i(t)$ durch den Schaltkreis beschreibt. (3 Punkte)

   (b) Bringen Sie die ODE in die Form $\dot{x} = Ax + Bu$. Geben Sie dafür die Matrizen A und B explizit an. (1 Punkt)

   (c) Fügen Sie nun in jede Kabelverbindung noch einen Widerstand ein, mit Widerständen R_L, R_{LC} und R_C. Leiten Sie eine neue Differentialgleichung der Form $\dot{x} = f(x, u)$ her und bringen Sie sie in die Form $\dot{x} = Ax + Bu$. (2 Punkte)

3. Untersuchen Sie die folgenden Differentialgleichungen ($k = \mathrm{const.}$) mit Eingangssignal $u(t)$ und Ausgangssignal $y(t)$ auf *Linearität* bzw. *Zeitinvarianz* sind, und begründen Sie Ihre Aussagen.

   (a) $\ddot{y}(t) = -\frac{y(t)}{k} + u(t)$ (2 Punkte)

   (b) $\dot{y}(t) = \sin(t) \cdot y(t) - ku(t)$ (2 Punkte)

   (c) $\dot{y}(t) = y(t) \cdot u(t)$ (2 Punkte)

   Tipp: Gehen Sie zum Test der Linearität von zwei Lösungstrajektorien $u_1(t), y_1(t)$ und $u_2(t), y_2(t)$ aus, und zeigen Sie explizit, dass jede Linearkombination auch eine Lösung ergibt. Zum Test der Zeitinvarianz betrachten Sie eine in der Zeit verschobene Lösungstrajektorie und testen Sie, ob sie wieder eine Lösung der Differentialgleichung ist.