

Übungsgruppe: 1 ☐ Felix Weyel

2 ☐ Merlin Trumpf

3 ☐ Felix Renard

4 ☐ Johannes Fischer

Name: _____ Matrikelnummer: _____ Punkte: / 9

Füllen Sie bitte Ihre Daten ein und machen Sie jeweils genau ein Kreuz bei der richtigen Antwort. Sie dürfen Extrapapier für Zwischenrechnungen nutzen, aber bitte geben Sie am Ende nur dieses Blatt ab. Richtige Antworten zählen 1 Punkt, falsche, keine oder mehrere Kreuze 0 Punkte.

1. Welches charakteristische Polynom $p_A(\lambda)$ hat das LTI-System $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx + Du$ mit den Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ und } D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}?$$

(a) ☐ $\lambda^2 - 5\lambda - 83$	(b) ☐ $\lambda^2 - 3\lambda - 71$	(c) ☒ $\lambda^2 - 5\lambda - 71$	(d) ☐ $\lambda^2 - 11\lambda + 83$
--	--	---	---

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - 3)(\lambda - 2) - (-11 \cdot 7) = \lambda^2 - 3\lambda - 2\lambda + 6 - 77 = \lambda^2 - 5\lambda - 71$$

2. Welches der folgenden vier Systeme beschreibt NICHT das gleiche Eingangs- Ausgangsverhalten wie $\ddot{y} + 4\dot{y} + 5y = \dot{u}$?

(a) ☐ $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$	(b) ☐ $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} x$
(c) ☒ $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} x$	(d) ☐ $2\ddot{y} + 16\dot{y} = 4\dot{u} - 20y - 2\ddot{y}$

$$\dot{x}_1 = 5x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - 4x_2 + u, \quad y = 2x_2$$

$$\ddot{x}_2 = -\dot{x}_1 - 4\dot{x}_2 + \dot{u} = -5x_2 - 4\dot{x}_2 + \dot{u}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ddot{y} + 2\dot{y} + \frac{5}{2}y = \dot{u}$$

3. Ein System ist beschrieben durch die Differentialgleichung $\dot{y}(t) = e^{it}u(t)$, wobei $u(t)$ das Eingangssignal und $y(t)$ das Ausgangssignal ist. Ist das System *linear* und/oder *zeitinvariant*?

(a) ☒ linear	(b) ☐ zeitinvariant
(c) ☐ linear und zeitinvariant	(d) ☐ weder linear noch zeitinvariant

Das System ist nicht zeitinvariant, da außer y und u noch mehr von t abhängt.

Differenzialgleichung für fixe Zeit ist Multiplikation einer Konstanten mit $u \Rightarrow$ linear.

4. Wie lautet die Matrixinverse von $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$?

(a) ☐ $\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	(b) ☐ $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$	(c) ☐ $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$	(d) ☒ $\begin{bmatrix} \frac{4}{10} & \frac{2}{10} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}$
--	--	--	---

Check $A * A^{-1}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{4}{10} & \frac{2}{10} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Alternativ:

$$A^{-1} = \frac{1}{-4 - 6} \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{10} & \frac{2}{10} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

5. Ein System ist beschrieben durch die Differentialgleichung $\dot{y}(t) = \frac{1}{1+t}u(t)$, wobei $u(t)$ das Eingangssignal und $y(t)$ das Ausgangssignal ist, mit $t \geq 0$. Ist das System *linear* und/oder *zeitinvariant*?

(a) ☒ linear	(b) ☐ zeitinvariant
(c) ☐ linear und zeitinvariant	(d) ☐ weder linear noch zeitinvariant

Differenzialgleichung ändert sich abhängig von der Zeit $\Rightarrow$ nicht zeitinvariant.

Differenzialgleichung für fixe Zeit ist Multiplikation einer Konstanten mit $u \Rightarrow$ linear.

6. Ein Auto fährt eine hügelige Strecke entlang. Der Zustand des Systems ist gegeben durch die Position des Fahrzeugs in der Landschaft p und dessen Geschwindigkeit v . Der Eingang des Systems ist die Antriebskraft F . Es gilt $\dot{v} = 0.5 \sin(4p) + 0.5F$. Linearisieren Sie das System um $p_{ss} = \pi$, $v_{ss} = 1$ und $F_{ss} = 0$. Bringen Sie das System in die Form $\dot{x} = Ax + Bu$. Geben Sie A und B an.

(a) ☒ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$	(b) ☐ $A = \begin{bmatrix} \pi & \pi \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
(c) ☐ $A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$	(d) ☐ $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} v \\ 0.5 \sin(4p) + 0.5F \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 \cdot 4 \cdot \cos(4p_{ss}) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

7. Wie verhält sich e^{st} in der komplexen Ebene, für $t \rightarrow \infty$, mit $s = a + bi$, $a = 0.1$, $b = 0.5$?

(a) ☐ Dreht sich im Uhrzeigersinn um die 0 und $ e^{st} \rightarrow 0$	(b) ☐ Dreht sich im Uhrzeigersinn um die 0 und $ e^{st} \rightarrow \infty$
(c) ☐ Dreht sich gegen den Uhrzeigersinn um die 0 und $ e^{st} \rightarrow 0$	(d) ☒ Dreht sich gegen den Uhrzeigersinn um die 0 und $ e^{st} \rightarrow \infty$

$$|e^{st}| = |e^{at}| \cdot |e^{bit}| = |e^{at}| \rightarrow \infty$$

$$e^{bit} = \cos(bt) + i \sin(bt) \Rightarrow \text{dreht sich gegen den Uhrzeigersinn}$$

8. Wie lautet der Imaginärteil von $e^{(aj+b)jt}$?

(a) ☐ $e^{at} \cdot \sin(bt)$	(b) ☒ $e^{-at} \cdot \sin(bt)$	(c) ☐ $e^{-bt} \cdot \sin(at)$	(d) ☐ e^{jbt}
--	--	---	--

$$\Im(e^{(aj+b)jt}) = \Im(e^{(-a+bj)t}) = \Im(e^{-at} \cdot e^{jbt}) = \Im(e^{-at} \cdot (\cos(bt) + j \sin(bt))) = e^{-at} \cdot \sin(bt)$$

9. Bei einem Testflug auf dem Mars soll der Helikopter namens Ingenuity von der Nasa Expedition auf eine Höhe von 3 Meter aufsteigen und dort auf der Stelle schweben. Der Helikopter mit der Masse m hat als Eingänge seinen Kippwinkel u_1 (gemessen zur vertikalen, d.h. während des Flugs gilt $|u_1| < 90^\circ$) und die Geschwindigkeit seines Rotors u_2 . Abhängig vom Kippwinkel und der Rotorgeschwindigkeit ist die Bewegungsgleichung für die vertikale z -Achse gegeben durch: $m \cdot \dot{v}_z = \cos(u_1) \cdot k_p \cdot u_2^2 - m \cdot g_m$ (dabei gibt g_m die Fallbeschleunigung auf dem Mars an) und für die horizontale x -Achse gegeben durch: $m \cdot \dot{v}_x = \sin(u_1) \cdot k_p \cdot u_2^2$. Welcher Kippwinkel u_1^{ss} und welche Rotorgeschwindigkeit u_2^{ss} müssen eingestellt werden, damit der Helikopter auf der Stelle schweben bleibt?

(a) ☒ $u_1^{ss} = 0,$ $u_2^{ss} = \sqrt{\frac{m \cdot g_m}{k_p}}$	(b) ☐ $u_1^{ss} = 0,$ $u_2^{ss} = \frac{m \cdot g_m}{k_p}$	(c) ☐ $u_1^{ss} = 45^\circ,$ $u_2^{ss} = 0$	(d) ☐ $u_1^{ss} = -45^\circ,$ $u_2^{ss} = \sqrt{\frac{m \cdot g_m}{k_p}}$
--	--	---	---

$$m \cdot \dot{v}_x = \sin(u_1^{ss}) \cdot k_p \cdot (u_2^{ss})^2 = 0 \Rightarrow \sin(u_1^{ss}) = 0 \Rightarrow u_1^{ss} = 0$$

$$m \cdot \dot{v}_z = \cos(0) \cdot k_p \cdot (u_2^{ss})^2 - m \cdot g_m = 0 \Leftrightarrow u_2^{ss} = \sqrt{\frac{m \cdot g_m}{k_p}}$$