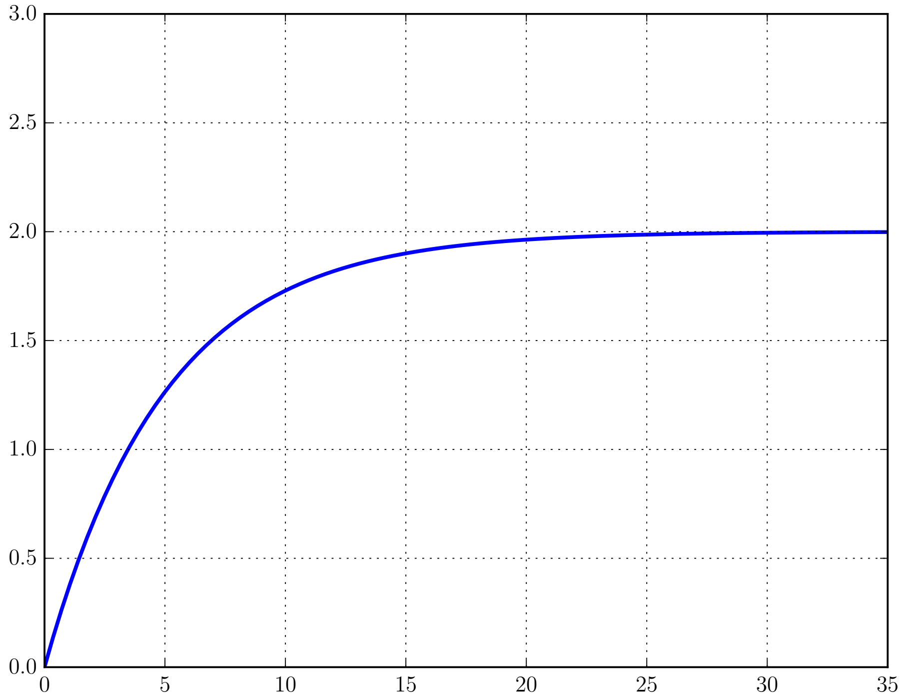
Vorlesung Systemtheorie und Regelungstechnik I (SR1)
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg – Sommersemester 2026

Übungsblatt 4: Verzögerungsglieder 1. Ordnung (zu Kapitel 2 und 3)

Prof. Dr. Moritz Diehl, Leonard Fichtner

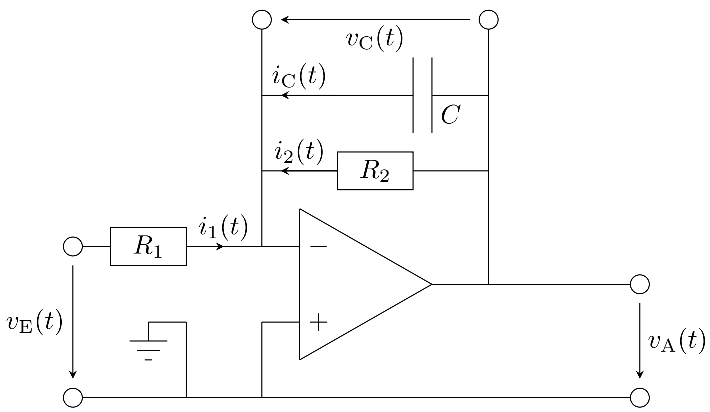
1. Ein PT_1-Glied zeigt folgende Sprungantwort. Wie lautet die Eingangs-Ausgangsdifferentialgleichung dieses Systems? (1 P.)



Lösung:

$$K = 2, T = 5 \quad \Rightarrow 5\dot{y} + y = 2u \tag{1}$$

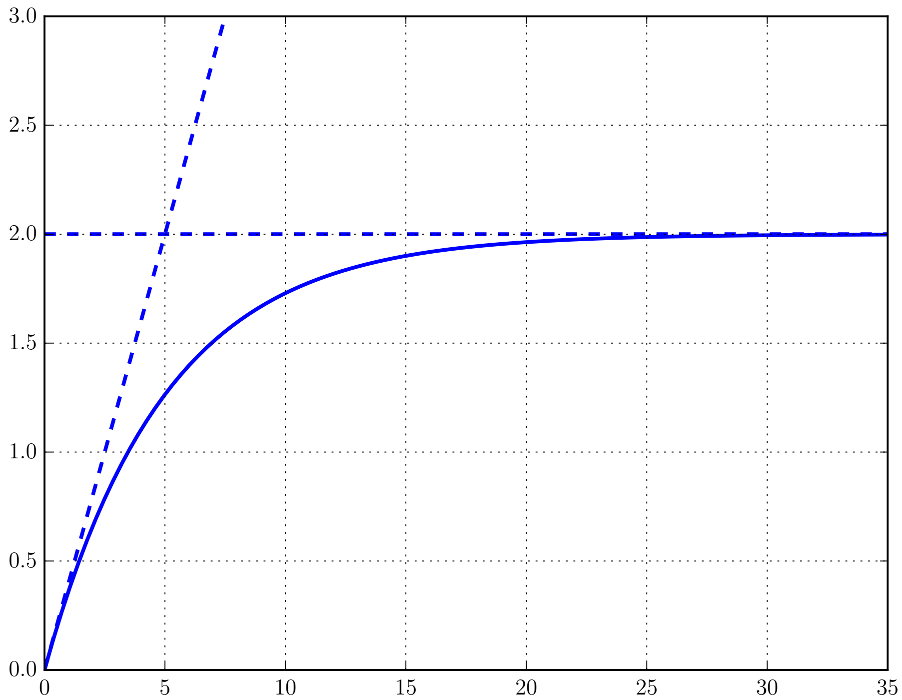
2. Für die nachfolgende Operationsverstärker–Schaltung soll ein mathematisches Modell erstellt werden. Eingangsgröße ist die Spannung $v_\mathrm{E}(t)$ und Ausgangsgröße ist die Spannung $v_\mathrm{A}(t)$.



Nehmen Sie den Operationsverstärker als ideal an, d. h. seine Verstärkung sei unendlich groß und es fließt kein Strom in seine beiden Eingänge. Das Prinzip der virtuelle Masse ist somit anwendbar.

(a) Geben Sie die Differentialgleichung, die das System beschreibt, in der Form $\dot{x} = f(x, u)$ an. Verwenden Sie als Zustand die Spannung $v_\mathrm{C}(t)$, die über dem Kondensator abfällt.

Hinweis: Nutzen Sie neben der virtuellen Masse auch die Kirchhoffsche Knotenregel, das Ohmsche Gesetz und die Kondensatorgleichung. (3 P.)



Lösung: Da der OPV ideal ist gilt das Prinzip der virtuellen Masse:

$$v_{\mathrm{E}} = R_1 \cdot i_1$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} i_{\mathrm{C}} &= C \cdot \dot{v}_{\mathrm{C}} \\ v_{\mathrm{C}} &= r_2 \cdot i_2 \\ i_1 + i_2 + i_{\mathrm{C}} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{v_{\mathrm{E}}}{R_1} + \frac{v_{\mathrm{C}}}{R_2} + C \cdot \dot{v}_{\mathrm{C}} &= 0 \\ \Leftrightarrow \dot{v}_{\mathrm{C}} &= -\frac{v_{\mathrm{E}}}{CR_1} - \frac{v_{\mathrm{C}}}{CR_2} \end{aligned}$$

Mit $x = v_{\mathrm{C}}$ und $u = v_{\mathrm{E}}$ folgt:

$$f(x, u) = -\frac{1}{CR_2}x - \frac{1}{CR_1}u$$

(b) Wie lautet die Ausgangsgleichung $y = g(x, u)$? (1 P.)

Lösung: Auf Grund der virtuellen Masse gilt $v_{\mathrm{A}} = v_{\mathrm{C}}$ und somit:

$$g(x, u) = x$$

(c) Ist das System $f(x, u)$ linear und/oder zeitinvariant? Beweisen Sie Ihre Aussage. (1 P.)

Lösung:

$$x_3 = \alpha x_1 + \beta x_2, u_3 = \alpha u_1 + \beta u_2 \Rightarrow \dot{x}_3 = \alpha \dot{x}_1 + \beta \dot{x}_2$$

$$\text{zu zeigen: } \dot{x}_3 = -\frac{1}{CR_2} x_3 - \frac{1}{CR_1} u_3$$

$$\alpha \dot{x}_1 + \beta \dot{x}_2 = -\frac{\alpha x_1 + \beta x_2}{CR_2} - \frac{\alpha u_1 + \beta u_2}{CR_1}$$

Da x_1 und x_2 Lösung der DGL sind, folgt:

$$\alpha \left(-\frac{x_1}{CR_2} - \frac{u_1}{CR_1} \right) + \beta \left(-\frac{x_2}{CR_2} - \frac{u_2}{CR_1} \right) = -\frac{\alpha x_1 + \beta x_2}{CR_2} - \frac{\alpha u_1 + \beta u_2}{CR_1}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\alpha x_1}{CR_2} - \frac{\alpha u_1}{CR_1} - \frac{\beta x_2}{CR_2} - \frac{\beta u_2}{CR_1} = -\frac{\alpha x_1}{CR_2} - \frac{\beta x_2}{CR_2} - \frac{\alpha u_1}{CR_1} - \frac{\beta u_2}{CR_1}$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0 \quad \square$$

$$\Rightarrow \text{Die DGL ist linear}$$

$$x_4(t) = x_1(t+\tau), u_4(t) = u_1(t+\tau) \Rightarrow \dot{x}_4(t) = \dot{x}_1(t+\tau)$$

$$\text{zu zeigen: } \dot{x}_4(t) = -\frac{x_4(t)}{CR_2} - \frac{u_4(t)}{CR_1}$$

$$\dot{x}_1(t+\tau) = -\frac{x_1(t+\tau)}{CR_2} - \frac{u_1(t+\tau)}{CR_1}$$

Da x_1 Lösung der DGL ist, folgt:

$$-\frac{x_1(t+\tau)}{CR_2} - \frac{u_1(t+\tau)}{CR_1} = -\frac{x_1(t+\tau)}{CR_2} - \frac{u_1(t+\tau)}{CR_1}$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0$$

$$\Rightarrow \text{Die DGL ist zeitinvariant}$$

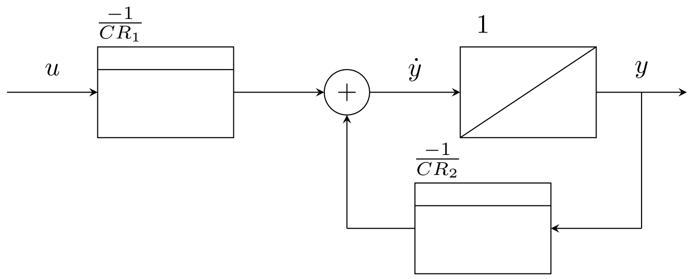
(d) Geben Sie die Eingangs-Ausgangsdifferentialgleichung des Systems an. (1 P.)

Lösung: Mit $y = v_\mathrm{A} = v_\mathrm{C}$ ergibt sich:

$$\dot{y} + \frac{1}{CR_2} y = -\frac{1}{CR_1} u$$

(e) Zeichnen Sie ein Blockschaltbild des Systems, das als Übertragungsglieder nur Proportionalglieder und Integratoren enthält, Summierglieder sind ebenfalls erlaubt. (1 P.)

Lösung:



(f) Um welches regelungstechnische Übertragungsglied handelt es sich bei der Schaltung? (1 P.)

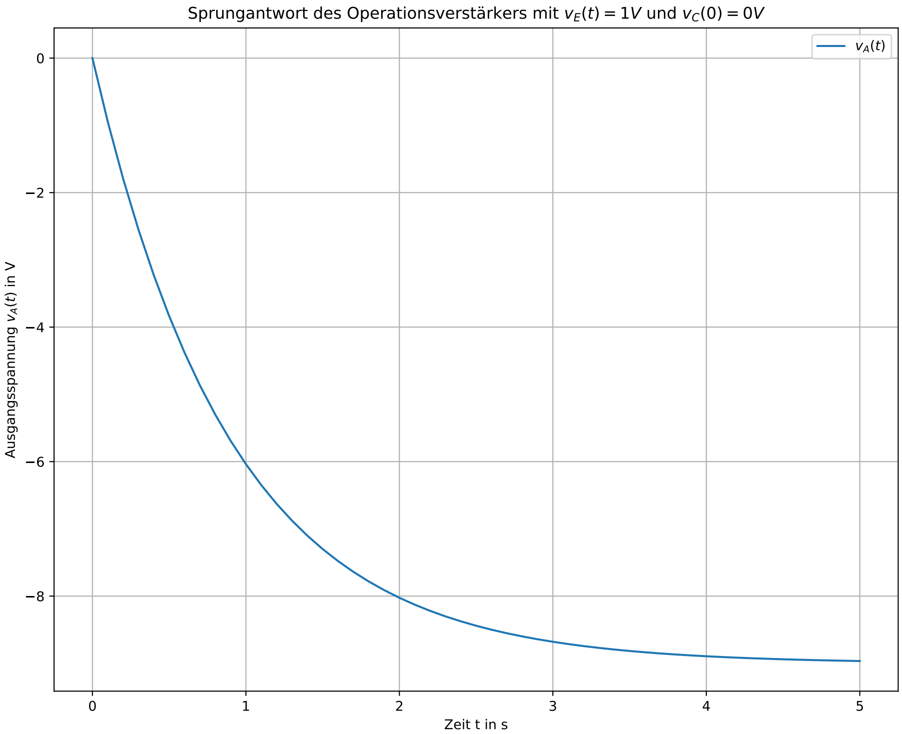
Lösung: Ein PT_1 Glied (aktiver Tiefpass)

(g) (Python) Die Parameter der Schaltung seien gegeben durch $R_1 = 100\,\Omega, R_2 = 900\,\Omega$ und $C = 1\,\mathrm{mF}$. Simulieren und plotten Sie den Verlauf der Ausgangsspannung $v_\mathrm{A}(t)$ für eine Eingangsspannung $v_\mathrm{E}(t) = 1\mathrm{V}$ für 5 Sekunden. Nehmen Sie an, dass die Schaltung zu Beginn der Simulation spannungslos ist, d.h. $v_\mathrm{C}(0) = 0\mathrm{V}$. (1 P.)

Hinweis: Zur Simulation des Systems implementieren Sie die Funktionen $f(x, u)$ und $g(x, u)$ als Python-Funktionen und verwenden Sie die Funktion `nlsim()` *aus dem letzten Übungsblatt.*

Lösung: Siehe Grafik am Ende

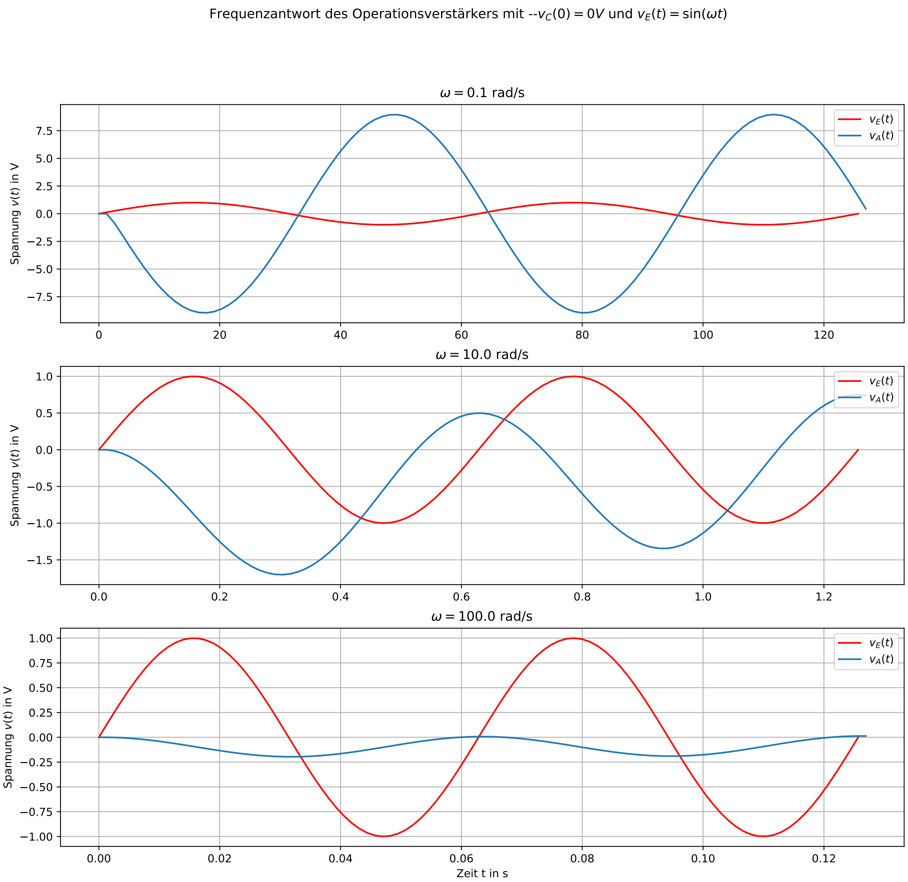
(h) *Simulieren Sie nun jeweils die Ausgangsspannung des Systems für sinusförmige Eingangssignale der Kreisfrequenz $\omega_1 = 0.1 \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}, \omega_2 = 10 \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$ und $\omega_3 = 100 \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$ über zwei Perioden des Eingangssignals. Nehmen Sie wieder an, dass die Schaltung zu Beginn der Simulation spannungslos ist, d.h. $x(0) = 0$. Plotten Sie jeweils Eingangs- und Ausgangssignal gemeinsam in ein Fenster und vergleichen Sie die drei Diagramme. Was verändert sich mit zunehmender



Frequenz? (*1 P.)

Hinweis: Ein Sinussignal der Frequenz w mit zwei Perioden kann in Python generiert werden mit
`T = np.linspace(0, 4*np.pi/w, 100); U = np.sin(w*T)`

Lösung: Der Ausgang wird mit zunehmender Frequenz immer gedämpfter(, da das System ein Tiefpass ist). Siehe andere Grafik am Ende



Frequenzantwort des Operationsverstärkers mit --$v_C(0) = 0V$ und $v_E(t) = \sin(\omega t)$
$\omega = 0.1$ rad/s
$\omega = 10.0$ rad/s
$\omega = 100.0$ rad/s
Spannung $v(t)$ in V
$v_E(t)$
$v_A(t)$
Zeit t in s