

Systemtheorie und Regelungstechnik 1 – Abschlussklausur

Prof. Dr. Moritz Diehl und Jochem De Schutter, IMTEK, Universität Freiburg

10. September 2022, 9:00-11:00, Freiburg, Georges-Koehler-Allee 101, HS 00 026, HS 00 036, SR 00-010/14

Seite	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte auf Seite (max)	4	10	5	8	6	6	6	0	0	0	45
Erreichte Punkte											
Zwischensumme											
Zwischensumme (max)	4	14	19	27	33	39	45	45	45	45	

Note:

Klausur eingesehen am:

Unterschrift des Prüfers:

Nachname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Fach:

Studiengang:

Bachelor ☐

Master ☐

Lehramt ☐

Sonstiges ☐

Unterschrift:

Tragen Sie bitte Ihren Namen und die anderen Angaben oben ein. Geben Sie die Antworten direkt unter den Fragen an oder nutzen Sie bei Bedarf nach Möglichkeit die Rückseite **desselben Blattes** (oder, falls diese bereits voll ist, die leere Seite am Ende) für Ergebnisse, die in die Korrektur einfließen sollen; verweisen Sie zudem direkt bei der Frage im Hauptteil auf die entsprechende Seite. Sie können zudem weiteres weißes Papier für Zwischenrechnungen verwenden, aber bitte geben Sie dieses Extrapapier nicht ab. Als Hilfsmittel ist neben Schreibmaterial und einem Taschenrechner auch ein doppelseitiges Blatt mit Formelsammlung und Notizen erlaubt; einige juristische Hinweise finden sich in einer Fußnote¹. Machen Sie bei den Multiple-Choice Fragen jeweils genau ein Kreuz bei der richtigen Antwort.

1. Ein System hat die Sprungantwort $h(t) = (\cos(t) - e^{-t}) \cdot \sigma(t)$ für $t \in \mathbb{R}$. Wie lautet die Impulsantwort $g(t)$ des Systems für $t \in \mathbb{R}$? ($\sigma(t)$ ist die Sprungfunktion und $\delta(t)$ der Dirac-Impuls)

(a) ☐ 0	(b) ☐ $-e^{-t} \cdot \sigma(t) + 2 \cdot \delta(t)$
(c) ☒ $e^{-t} \cdot \sigma(t) - \sin(t) \cdot \sigma(t)$	(d) ☐ $(e^{-t} - \sin(t)) \cdot \sigma(t) + (\cos(t) + e^{-t}) \cdot \delta(t)$

1

2. Welche der folgenden Aussagen trifft auf ein System mit der Impulsantwort $g(t) = t^3 e^{-t} \sigma(t)$ zu?

(a) ☐ Keine Aussage möglich.	(b) ☒ Das System ist BIBO-stabil.
(c) ☐ Das System ist nicht zustandsstabil.	(d) ☐ Das System ist BIBO-instabil.

1

3. Die Phasenkennlinie des Bodediagramms eines Integratorglieds ist konstant und weist den folgenden Wert auf:

(a) ☐ 90°	(b) ☒ -90°
(c) ☐ 180°	(d) ☐ 0°

1

4. Ein System hat zwei Eingänge $u_1(t)$ und $u_2(t)$ und einen Ausgang $y(t)$. Es ist durch die Differentialgleichung $\dot{y}(t) = y(t) + u_1(t) \cdot u_2(t)$ beschrieben. Ist das System *linear* und/oder *zeitinvariant*?

(a) ☒ zeitinvariant aber nicht linear	(b) ☐ keines von beiden
(c) ☐ linear aber nicht zeitinvariant	(d) ☐ linear und zeitinvariant

1

¹PRÜFUNGSUNFÄHIGKEIT: Durch den Antritt dieser Prüfung erklären Sie sich für prüfungsfähig. Sollten Sie sich während der Prüfung nicht prüfungsfähig fühlen, können Sie aus gesundheitlichen Gründen auch während der Prüfung von dieser zurücktreten. Gemäß den Prüfungsordnungen sind Sie verpflichtet, die für den Rücktritt oder das Versäumnis geltend gemachten Gründe unverzüglich (innerhalb von 3 Tagen) dem Prüfungsamt durch ein Attest mit der Angabe der Symptome schriftlich anzuzeigen und glaubhaft zu machen. Weitere Informationen: <https://www.tf.uni-freiburg.de/studium/pruefungen/pruefungsunfaehigkeit.html>.

TÄUSCHUNG/STÖRUNG: Sofern Sie versuchen, während der Prüfung das Ergebnis ihrer Prüfungsleistung durch Täuschung (Abschreiben von Kommilitonen ...) oder Benutzung nicht zugelassener Hilfsmittel (Skript, Buch, Mobiltelefon, ...) zu beeinflussen, wird die betreffende Prüfungsleistung mit "nicht ausreichend" (5,0) und dem Vermerk "Täuschung" bewertet. Als Versuch gilt bei schriftlichen Prüfungen und Studienleistungen bereits der Besitz nicht zugelassener Hilfsmittel während und nach der Ausgabe der Prüfungsaufgaben. Sollten Sie den ordnungsgemäßen Ablauf der Prüfung stören, werden Sie vom Prüfer/Aufsichtsführenden von der Fortsetzung der Prüfung ausgeschlossen. Die Prüfung wird mit "nicht ausreichend" (5,0) mit dem Vermerk „Störung“ bewertet.

5. Gegeben ist das System $\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} x(t)$.

- (a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $p(\lambda)$ des Systems.

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 4$$

1	
---	--

- (b) Berechnen Sie die Polstellen des Systems.

$$\lambda_1 = 2j, \lambda_2 = -2j$$

1	
---	--

- (c) Welche Stabilitätseigenschaften (asymptotisch stabil/grenzstabil/BIBO-stabil) kann man dem System zuschreiben?

Die Eigenwerte der Systemmatrix haben nur einen Imaginärteil, deshalb ist das System grenzstabil, nicht asymptotisch stabil und nicht BIBO-stabil.

2	
---	--

6. Gegeben ist System 1 in Zustandsraumdarstellung mit Matrizen $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = [1 \quad 0]$ $D = [1]$

- (a) Wie lautet die Übertragungsfunktion $G_1(s) = \frac{Y_1(s)}{U(s)}$ des Systems?

$$G_1(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{s^2 - 3s}{s^2 - 4s + 3}$$

1	
---	--

- (b) Das System wird mit dem System 2: $\ddot{y}_2(t) + y_2(t) = \dot{u}(t)$ in Parallel geschaltet und die Ausgänge addiert. Wie lautet die sich ergebende Gesamtübertragungsfunktion $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$?

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) = G_1(s) + \frac{s}{s^2 + 1} = \frac{s^2 - 3s}{s^2 - 4s + 3} + \frac{s}{s^2 + 1} = \frac{s^4 - 2s^3 - 3s^2}{(s^2 - 4s + 3)(s^2 + 1)}$$

1	
---	--

7. Ein System ist durch die Differentialgleichung $\ddot{y}(t) - \cos(2\pi t_0)y(t) = u(t - t_0)$ beschrieben, wobei t_0 ein von Null verschiedener konstanter Parameter ist. Ist das System *linear* und/oder *zeitinvariant*?

(a) ☐ keines von beiden	(b) ☐ nur zeitinvariant
(c) ☐ nur linear	(d) ☒ linear und zeitinvariant

1	
---	--

8. Die LTI-Systeme $\ddot{y}_1(t) = \dot{u}_1(t)$ und $\ddot{y}_2(t) + 2\dot{y}_2(t) = u_2(t)$ werden *Reihe* geschaltet. Wie lautet die sich ergebende Gesamtübertragungsfunktion $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$?

(a) ☒ $\frac{1}{s^3 + 2s^2}$	(b) ☐ 2	(c) ☐ $s^3 + s^2 + 2$	(d) ☐ $\frac{s+1}{s^4 + 2s^3 + 1}$
--	--------------------------------	--	---

2	
---	--

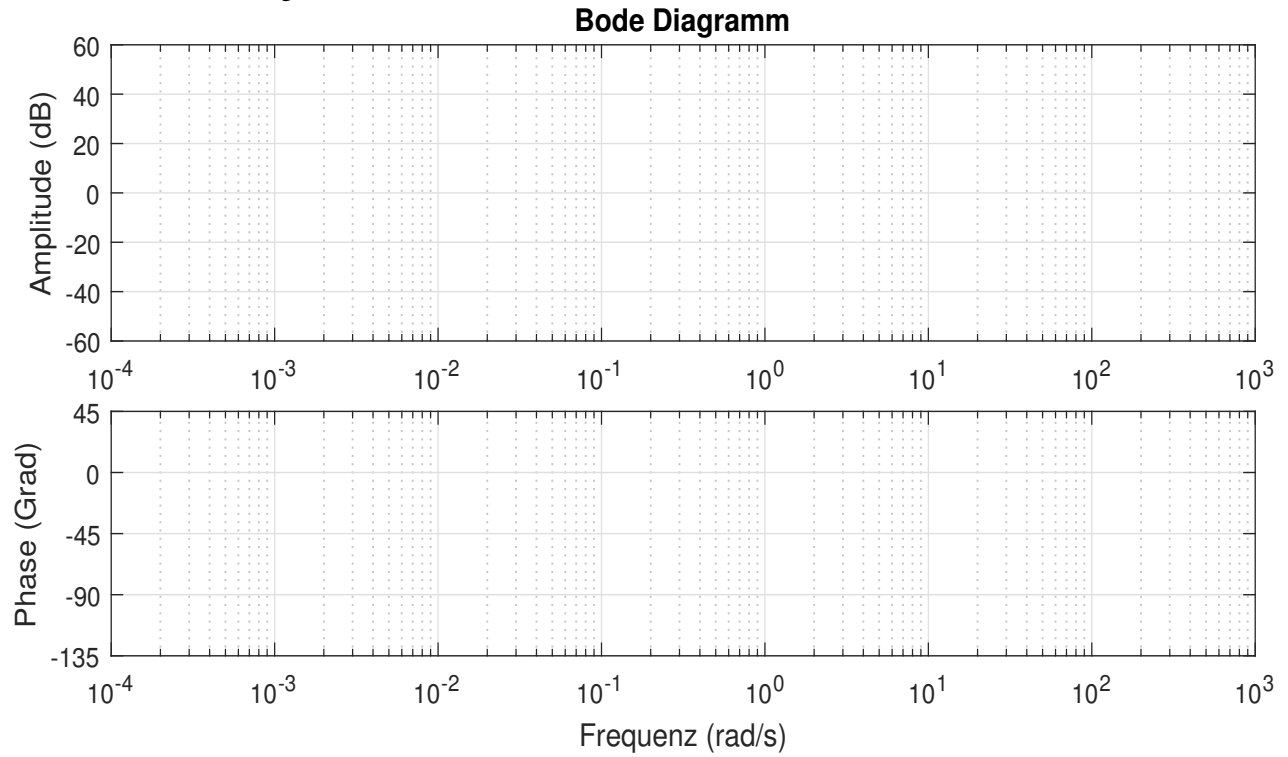
- (b) Betrachten Sie die resultierende Gesamtübertragungsfunktion $G(s)$ als eine offene Kette. Welche Aussage über den sich ergebenden geschlossenen Kreis (mit negativen Einheitsfeedback) ist korrekt? Der geschlossene Kreis hat ein gutes Verhalten für...

(a) ☐ ...ausschließlich hochfrequente Störungen	(b) ☒ ...ausschließlich niedrigfrequente Referenzsignale
(c) ☐ ...niedrigfrequentes Messrauschen	(d) ☐ ...Störungen im ganzen Frequenzbereich

1	
---	--

9. Gegeben ist eine Strecke $G(s) = 100 \cdot \frac{10s + 1}{(1000s + 1)(0.1s + 1)}$.

(a) Skizzieren Sie das Bode-Diagramm des offenen Kreises.



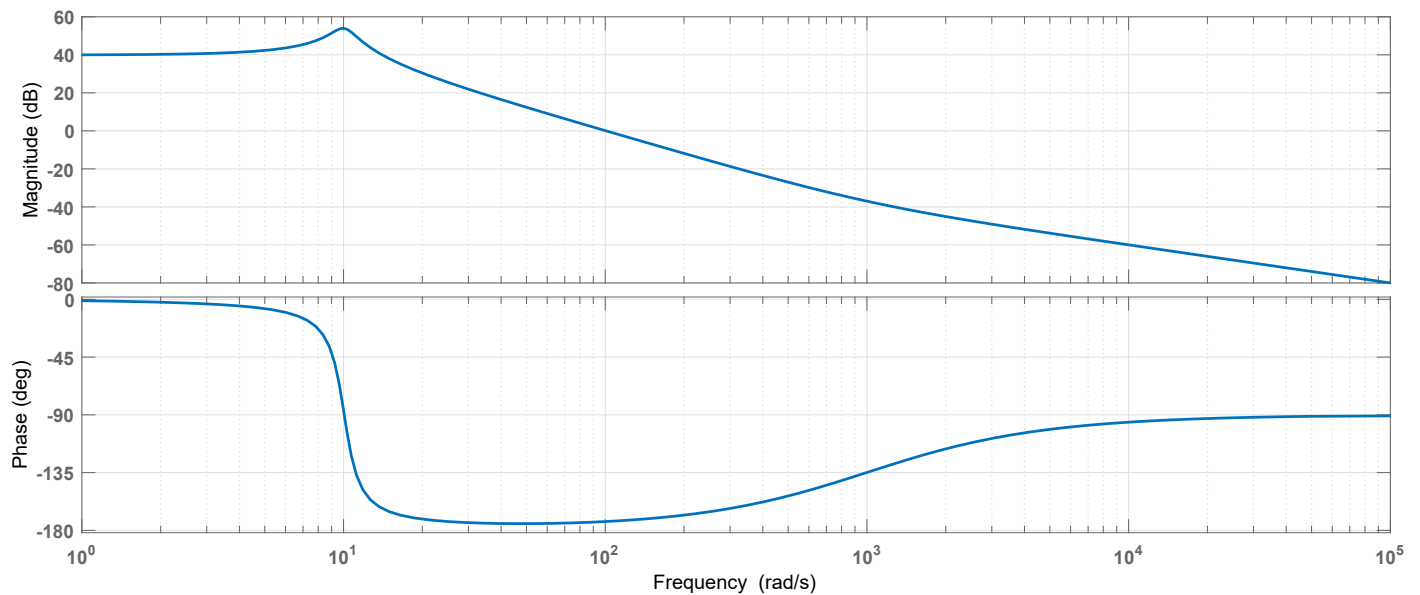
3	
---	--

(b) Ist der geschlossene Kreis beim negativen Einheitsfeedback stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

Ja, stabil, weil Phasenreserve > 0 . Auch gut: alle Pole der Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises haben einen negativen Realteil.

2	
---	--

10. Für ein BIBO-stabiles LTI-System $G(s)$ wurde folgendes Bode-Diagramm ermittelt.



(a) Wie hoch ist die Durchtrittsfrequenz des Systems?

(a) ☐ Das System hat keine Durchtrittsfrequenz.	(b) ☒ ca. $100 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	1
(c) ☐ ca. $10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	(d) ☐ $0 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	

(b) Wie hoch ist der relative Grad (Polüberschuss) des Systems?

(a) ☐ 2	(b) ☐ 3	(c) ☒ 1	(d) ☐ 0	1
--------------------------------	--------------------------------	---	--------------------------------	---

(c) Wie hoch ist die statische Verstärkung (DC-Gain) des Systems?

(a) ☐ -80	(b) ☒ 100	(c) ☐ $-\infty$	(d) ☐ 20	1
----------------------------------	---	--	---------------------------------	---

(d) Welche der folgenden Aussagen bezüglich der Phasenreserve Φ_{PR} des Systems ist korrekt?

(a) ☒ $0^\circ < \Phi_{PR} < 10^\circ$	(b) ☐ $-180^\circ < \Phi_{PR} < -140^\circ$	1
(c) ☐ $\Phi_{PR} = 0^\circ$	(d) ☐ $\Phi_{PR} = \infty^\circ$	

(e) Welche Amplitudenreserve hat das System?

(a) ☒ ∞	(b) ☐ 20	(c) ☐ 40	(d) ☐ 0	1
--	---------------------------------	---------------------------------	--------------------------------	---

(f) Enthält das System einen reinen Integrator (d.h. eine Polstelle bei Null) und/oder ein Totzeitglied?

(a) ☐ Integrator und Totzeitglied	(b) ☐ Nur Integrator	1
(c) ☒ Keines von beiden	(d) ☐ Nur Totzeitglied	

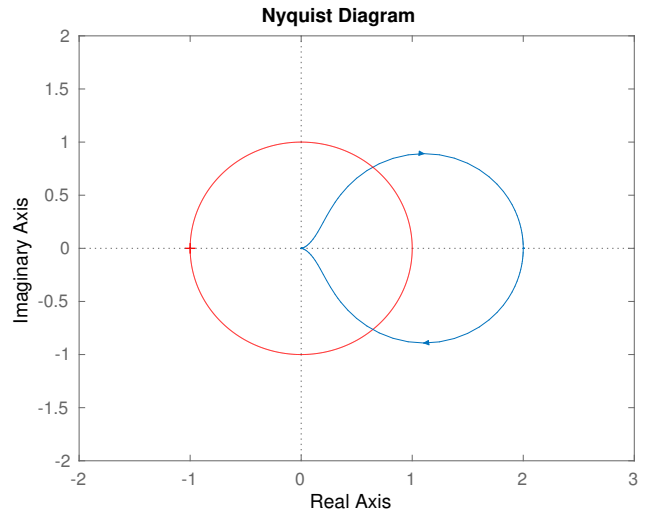
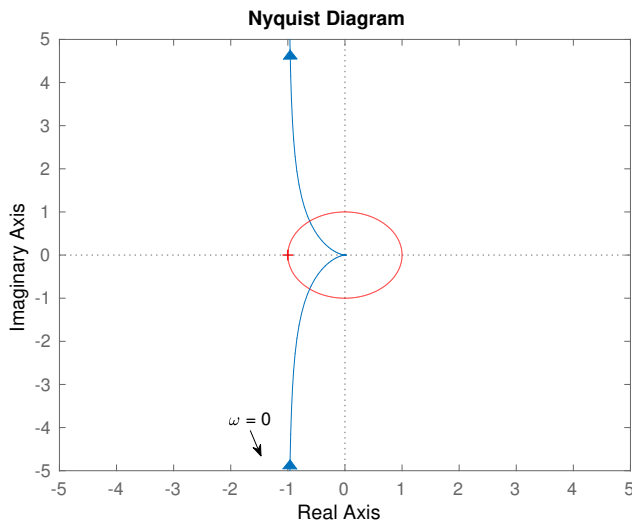
(g) Wieviele Pole mit Imaginärteil besitzt das System?

(a) ☐ 0	(b) ☐ Keine Aussage möglich	1
(c) ☐ 1	(d) ☒ mindestens 2	

(h) Ist das resultierende System BIBO-stabil, wenn der Ausgang mit -1 multipliziert und auf den Eingang des Systems gegeben wird?

(a) ☐ Keine Aussage möglich, da das System nicht minimalphasig ist.	(b) ☐ Nein	1
(c) ☒ Ja	(d) ☐ Keine Aussage möglich, da das Bode-Diagramm nur die stationäre Antwort zeigt.	

11. Für die Systeme A (links abgebildet) und B (rechts abgebildet) wurden folgende Nyquist-Diagramme ermittelt. Der Einheitskreis ist in rot abgebildet.



- (a) Welche Amplitudenreserve hat das System A, in etwa?

(a) ☒ ∞	(b) ☐ 1.6	1	
(c) ☐ 10	(d) ☐ -7.5		

- (b) Welche Phasenreserve hat das System A, in etwa?

(a) ☐ ∞	(b) ☐ -75°	1	
(c) ☒ 45°	(d) ☐ 180°		

- (c) Was ist der Steady-State Fehler des geschlossenen Kreises mit System A, beim negativen Einheitsfeedback?

Hinweis: betrachten Sie die statische Verstärkung des Systems.

(a) ☒ 0%	(b) ☐ ∞	1	
(c) ☐ 10%	(d) ☐ 100%		

- (d) Betrachten Sie das Diagramm von System B. Welcher Übertragungsfunktion $G_0(s)$ entspricht es? Begründen Sie Ihre Antwort mit 2 Argumenten.

Hinweis: betrachten Sie die Phasenverschiebung für hohe Frequenzen.

(a) ☐ $\frac{1000}{(s+10)(s+100)}$	(b) ☐ $\frac{1000}{(s+10)(-s+100)}$	2	
(c) ☒ $\frac{2000}{(s+10)(-s+100)}$	(d) ☐ $\frac{2000}{(s+10)(s+100)}$		

- (e) Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

(a) ☐ ...System A hat eine kleinere statische Verstärkung als System B.	(b) ☐ ...System A und System B haben die gleiche Phasenverschiebung für sehr hohe Frequenzen.	1	
(c) ☐ ...Der geschlossene Kreis von System A mit negativem Einheitsfeedback ist instabil.	(d) ☒ ...Der geschlossene Kreis von System B mit negativem Einheitsfeedback ist instabil.		

12. Nach der anstrengenden Klausurenphasen entscheiden Sie sich, einen Wohnwagen zu mieten und campen zu fahren. Da es Ihnen aber vor dem Rückwärtsfahren mit Anhänger graut, entscheiden Sie sich, einen Regler für dieses Problem zu implementieren. Die linearisierte Dynamik des Systems aus Auto und Anhänger ist gegeben in der Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{V}{L_2} & \frac{V}{L_2} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -\frac{V}{L_1} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)\end{aligned}$$

wobei der Eingang $u(t)$ den Einschlagwinkel der Vorderräder bezeichnet. Der Zustandvektor ist gegeben durch $x(t) = [\beta(t) \quad \gamma(t)]^\top$. Der Zustand β ist der Winkel den das Auto zur x-Achse eines globalen Koordinatensystems hat und der Zustand γ ist der Winkel des Anhängers zu demselben Koordinatensystem. Die exakte Position von Auto und Anhänger werden ignoriert. Die Rückwärtsgeschwindigkeit des Autos ist gegeben durch ein bekanntes $V > 0$. Die Länge L_1 des Autos beträgt 3 m, der Anhänger hat eine Länge von $L_2 = 4$ m.

- (a) Zeigen Sie, dass das System steuerbar ist.

System ist steuerbar $\Leftrightarrow Q_S = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix}$ hat vollen Rang.

$$Q_S = \begin{bmatrix} -\frac{V}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{V^2}{L_1 L_2} \end{bmatrix}$$

$\det(Q_S) \neq 0 \Rightarrow$ **System ist steuerbar.**

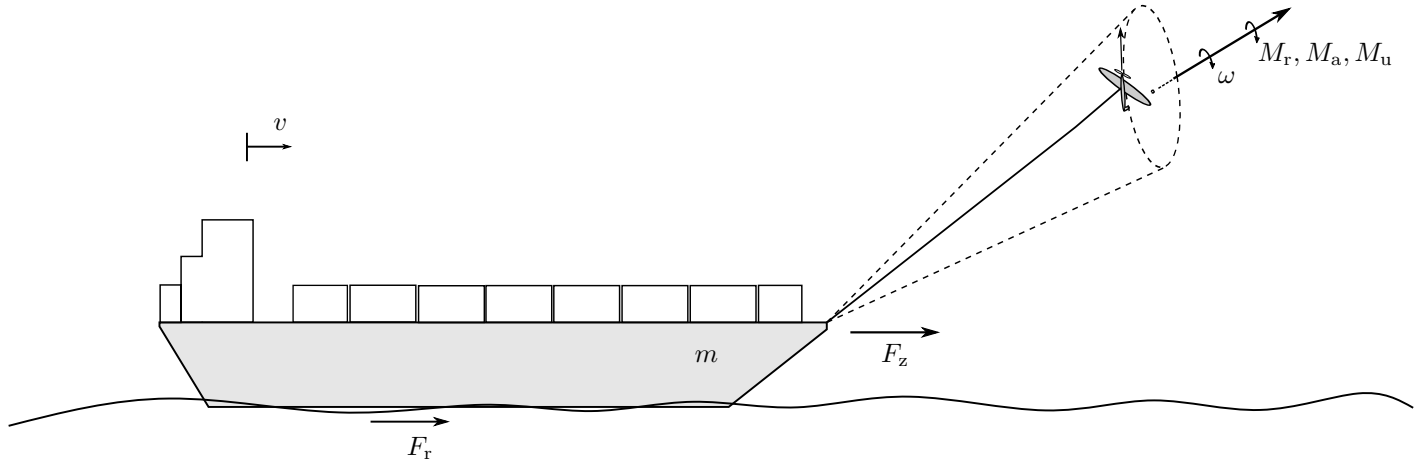
2	
---	--

- (b) Sie wollen mittels Polvorgabe einen Regler für das linearisierte System erstellen. Suchen Sie dafür den Regler $K = [k_0 \ k_1]$ in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit V , sodass der geschlossene Kreis die Polstellen $\lambda_i = -3 \pm 3j$ hat.

$$\begin{aligned}p(\lambda) &= \det(\lambda I - (A - BK)) = \det \left(\begin{bmatrix} \lambda - \frac{V}{3}k_0 & -\frac{V}{3}k_1 \\ \frac{V}{4} & \lambda - \frac{V}{4} \end{bmatrix} \right) \\ &= \dots = \lambda^2 + \left(-\frac{V}{3}k_0 - \frac{V}{4}\right)\lambda + \frac{V^2}{12}(k_0 + k_1) \\ p_{\text{wish}}(\lambda) &= (\lambda + 3 + 3j)(\lambda + 3 - 3j) = \lambda^2 + 6\lambda + 18 \\ p_{\text{CLwish}}(\lambda) &\stackrel{!}{=} p(\lambda) \\ \Rightarrow 6 &= -\frac{V}{3}k_0 - \frac{V}{4} & \Rightarrow k_0 &= -\frac{18}{V} - \frac{3}{4} \\ \Rightarrow 18 &= \frac{V^2}{12}(k_0 + k_1) & \Rightarrow k_1 &= \frac{216}{V^2} - k_0 = \frac{216}{V^2} + \frac{18}{V} + \frac{3}{4}\end{aligned}$$

4	
---	--

13. Ein Frachtschiff wird von einem Zugdrachen, der einem angelegten Propellerflugzeug ähnelt, gezogen. Ein Seil verbindet das Schiff mit dem Zugdrachen, der auf aerodynamische Weise eine Antriebskraft generiert. Die komplexe und sehr nichtlineare Systemdynamik wird hier anhand folgender Vereinfachungen beschrieben. Das Schiff hat eine Masse m und hat als Zustand die Geschwindigkeit v . Dabei empfindet es eine Reibungskraft $F_r = -\frac{1}{2}cv^2$ durch das Wasser sowie eine Zugkraft $F_z = \frac{1}{2}k\omega^2$, wobei ω die Rotationsgeschwindigkeit des Drachens auf dem Kreis ist. Das Zugdrachensystem hat ein Trägheitsmoment J und wird beschrieben durch den Zustand ω . Ein Luftreibungsmoment $M_r = -\frac{1}{2}C_D\omega^2$ wirkt der Rotationsgeschwindigkeit entgegen. Ein Moment $M_a = C_L(v_w - v)\omega$, das von der relativen Windgeschwindigkeit $v_w - v$ abhängig ist, treibt das Zugdrachensystem an. Eingang des Systems ist der Propellerkoeffizient u , der über das Moment $M_u = \frac{1}{2}u\omega^2$ den Zugdrachen beschleunigen oder abbremsen kann. Die Parameter c, k, C_D, C_L und die Windgeschwindigkeit v_w sind bekannte Konstanten.



Der Systemzustand wird definiert als $x(t) = \begin{bmatrix} v(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}$. Der Ausgang ist $y(t) = v(t)$, und der Eingang ist der Propellerkoeffizient $u(t)$.

- (a) Geben Sie das nichtlineare Zustandsraummodell des Systems in der Form $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ an. Berücksichtigen Sie dabei die Kräfte F_r, F_z , die Momente M_r, M_a und M_u , sowie die Trägheit des Schiffes und die Rotationsträgheit des Zugdrachensystems, die mit dem Faktor J proportional zur Rotationsbeschleunigung $\dot{\omega}(t)$ ist (es gilt also $J\dot{\omega} = \sum_i M_i$).

$$\begin{aligned} m\dot{v}(t) &= F_r + F_z \\ J\dot{\omega}(t) &= M_r + M_a + M_u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m\dot{v}(t) &= -\frac{1}{2}cv^2 + \frac{1}{2}k\omega^2 \\ J\dot{\omega}(t) &= -\frac{1}{2}C_D\omega^2 + C_L(v_w - v)\omega + \frac{1}{2}u\omega^2 \end{aligned}$$

3	
---	--

- (b) Linearisieren Sie das nichtlineare Zustandsraummodell um die als bekannt angenommene Ruhelage x_{ss} und u_{ss} für die gilt: $f(x_{ss}, u_{ss}) = 0$. Geben Sie das linearisierte System in der Form $\Delta\dot{x}(t) = A\Delta x(t) + B\Delta u(t)$, wobei $\Delta x(t) = x(t) - x_{ss}$ und $\Delta u(t) = u(t) - u_{ss}$ die Abweichungen um die Ruhelagen sind.

$$\Delta\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{c}{m}v_{ss} & \frac{k}{m}\omega_{ss} \\ -\frac{C_D}{J}\omega_{ss} & \frac{u_{ss}-C_D}{J}\omega_{ss} + \frac{C_L}{J}(v_w - v_{ss}) \end{bmatrix} \Delta x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\frac{1}{J}\omega_{ss} \end{bmatrix} \Delta u(t)$$

3	
---	--

Leeres Blatt für Zwischenrechnungen