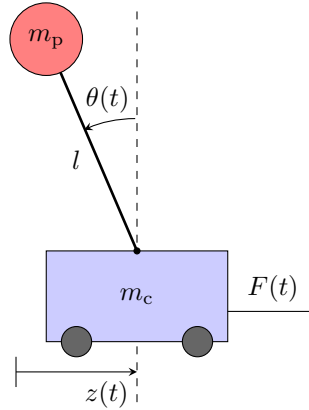


Bonusblatt: Zustandsregelung und Beobachter

Prof. Dr. Moritz Diehl, Leonard Fichtner

1. Betrachten Sie das folgende invertierte Pendel auf einem Wagen:



Dabei gilt:

$m_c = 1$	Masse des Wagens in kg	$m_p = 0.2$	Masse des Pendels in kg
$l = 0.4$	Länge des Pendels in m	$v_c = 0.2$	Reibungskonstante in $\frac{\text{N}}{\text{m s}}$
$F(t)$	Kraft zur Steuerung in N	$z(t)$	Position des Wagens in m
$\theta(t)$	Winkel des Pendels in rad	$g = 9.81$	Fallbeschleunigung in $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Das System wird durch die folgenden Differentialgleichungen beschrieben:

$$F(t) = (m_p + m_c)\ddot{z}(t) + v_c\dot{z}(t) - m_pl\ddot{\theta}(t)\cos(\theta(t)) + m_pl\dot{\theta}(t)^2\sin(\theta(t))$$

$$m_pl^2\ddot{\theta}(t) = m_pl\ddot{z}(t)\cos(\theta(t)) + m_plg\sin(\theta(t))$$

Betrachten Sie den Zustandsvektor $x(t) = [z(t) \dot{z}(t) \theta(t) \dot{\theta}(t)]^\top$ und den Eingang $u(t) = F(t)$.

(a) Entwurf eines Zustandsreglers

i. Linearisieren Sie das System $\dot{x} = f(x, u)$ für $x_{ss} = 0$ und $u_{ss} = 0$ und berechnen Sie die Matrizen

$$A = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{x_{ss}, u_{ss}} \quad \text{und} \quad B = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{x_{ss}, u_{ss}}.$$

TIPP: Linearisieren Sie zuerst die Gleichungen und lösen Sie erst dann nach $\ddot{z}(t)$ und $\ddot{\theta}(t)$ auf. (2 P.)

ii. Betrachten Sie von jetzt ab das linearisierte System $\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2 & 1.962 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.5 & 29.43 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 2.5]^\top.$$

Ist das System (A, B) steuerbar? Begründen Sie Ihre Antwort. (0.5 P.)

iii. (Python) Benutzen Sie den Befehl `place`, um eine Feedbackmatrix K zu berechnen, die das System stabilisiert. Die Pole des geschlossenen Kreises sollen bei den Werten -1, -1.5, -2, -2.5 liegen. (0.5 P.)

iv. (Python) Nehmen Sie an, dass Sie alle Zustände perfekt messen können. Simulieren Sie die Antwort des geregelten Systems für den Anfangswert $x(0) = [0 \quad 0 \quad 0.5 \quad 0]^\top$. (1 P.)

(b) Entwurf eines Luenberger Beobachters

Nehmen Sie nun an, dass der Zustand nicht direkt gemessen werden kann und daher mithilfe eines Zustandsschätzer bestimmt werden muss.

i. Betrachten Sie die zwei Ausgangssignale

$$y_1(t) = z(t) + 0.4 \sin \theta(t),$$

absolute Position der Pendelmasse,

$$y_2(t) = \theta(t),$$

Winkel der Pendelmasse.

Linearisieren Sie die Ausgangsgleichungen, um jeweils C und D zu erhalten. Wählen Sie von den beiden Ausgängen denjenigen, der am besten geeignet ist, um den Zustand des Pendels zu schätzen. Begründen Sie ihre Wahl. (1.5 P.)

ii. Welche Bedingung muss eine Beobachtermatrix L erfüllen, damit sie zum Zustandsregler K passt? (0.5 P.)

iii. (Python) Berechnen Sie eine passende Luenberger Beobachtermatrix L mithilfe des Befehls `place` (0.5 P.)

(c) **Simulation des Gesamtsystems**

Berechnen Sie nun die Systemgleichungen des geschlossenen Kreises bestehend aus Strecke, Beobachter und Regler, zunächst ohne Zahlenwerte. Betrachten Sie hierfür Abbildung 13.2 auf Seite 143 des Skriptes.

i. Berechnen Sie $u(t)$ als Funktion von $r(t), \hat{x}(t)$. (0.5 P.)

ii. Berechnen Sie $\dot{x}(t)$ als Funktion von $r(t), x(t), \hat{x}(t)$. (0.5 P.)

iii. Berechnen Sie $\dot{\hat{x}}(t)$ als Funktion von $r(t), x(t), \hat{x}(t)$. (0.5 P.)

iv. Der Zustand des geschlossenen Kreises ist $x_{CL}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$. Berechnen Sie die Matrizen A_{CL}, B_{CL} und C_{CL} des Zustandsraummodells des geschlossenen Kreises (1 P.)

$$\dot{x}_{CL}(t) = A_{CL} \cdot x_{CL}(t) + B_{CL} \cdot r(t)$$

$$y(t) = C_{CL} \cdot x_{CL}(t)$$

als Funktion von A, B, C, K und L .

(d) (Python) Verwenden Sie von jetzt ab die Matrizen $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}$, $D = 0$ und $L = \begin{bmatrix} -3.5 & 11 & 46 & 248 \end{bmatrix}^T$. Simulieren Sie die Sprungantwort des geschlossenen Kreises. (1 P.)