Vorlesung Systemtheorie und Regelungstechnik (SR)
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg – Sommersemester 2024

Übungsblatt 2: Modellierung und Simulation (zu Kapitel 2)

Prof. Dr. Moritz Diehl, Dr. Jochem De Schutter

1. Wir möchten die Translationsbewegung eines starren Körpers im dreidimensionalen Raum modellieren. Dabei sollen auf den Körper einwirkende Kräfte unmittelbar berücksichtigt werden. Welche Größen würden Sie bei der Modellierung als Zustände wählen? Wie nennt man ein solches Modell in der Mechanik? (1 Punkt)

2. (Python) Die folgenden Aufgaben sollen Sie mit ein paar grundlegende Python-Befehlen vertraut machen. Eine Dokumentation der einzelnen Funktionen erhalten Sie über den Befehl `help()`. (2 Punkte)

   (a) Das Python-Paket `numpy` ist u.a. auf das Rechnen mit Matrizen und Vektoren ausgelegt. Erstellen Sie ein neues Skript `blatt2.py` und erstellen Sie folgende Matrizen:
   `a = np.array([ [1, 2],[3, 4]])`, `b = np.arange(1,6)`, `c=np.eye(3)`, `d=np.ones((2, 5))`, `e=np.zeros(a.shape)`

   (b) Berechnen Sie zweimal das Produkt von `a` mit sich selbst. Einmal mit `np.dot()` und dann mit `np.multiply()`. Was ist der Unterschied?

   (c) Lesen Sie die erste Spalte von `a` mit Hilfe von `f = a[:,0]` aus und berechnen Sie die Ausdrücke: `a@f`, `f@a`, `f.T@a`. Wieso unterscheiden sich `f@a` und `f.T@a` nicht?

   (d) Erstellen Sie eine Funktion `myfirstfunction` mit den Argumenten `a` und `b`, die den Sinus der Variable `b` berechnet und ausgibt. Verwenden Sie in der Funktion auch den Befehl `print('Hello {} World'.format(a))` und testen Sie Ihre Funktion mit `myfirstfunction('Python', 0)` und `myfirstfunction('numerical', 90)`. Wieso ist der Sinus von 90° nicht 1?

3. Wofür steht die Abkürzung LTI und was sind LTI-Systeme? (1 Punkt)

4. Wir modellieren die Wassermenge $m(t)$ (in kg) in einem Waschbecken, in das durch einen Wasserhahn Wasser mit der von uns steuerbaren Massenflussrate $u(t)$ (in kg/s) einläuft. Neben dem Zufluss $u(t)$ durch den Wasserhahn gibt es auch einen Ausfluss, da der Stöpsel offen ist. Der Ausfluss habe die Massenflussrate $k\sqrt{m(t)}$, wobei k eine als bekannt angenommene positive Konstante (mit Einheit $\sqrt{\text{kg}}$/s) ist. Wir gehen davon aus, dass die Kapazität des Waschbeckens unendlich groß ist und es somit nie zu einem Überlauf kommen kann. (6 Punkte)

   (a) Skizzieren Sie das Waschbecken mit seinen Ein- und Ablaufströmen.

   (b) Entscheiden Sie welchen Zustand - oder welche Zustände - $x(t)$ Sie brauchen und das System vollständig beschreiben zu können. Überlegen Sie sich dafür welche Größen Sie neben Eingangssignal und den dynamischen Gleichungen noch benötigen um das Systemverhalten vorherzusagen.

   (c) Leiten Sie eine gewöhnliche Differentialgleichung (ODE) der Form $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ her, die das dynamische Verhalten der Zustände $x(t)$ beschreibt. Denken Sie an den Zu- und Abfluss des Wassers. Verwenden Sie die Anfangsbedingung $m(0) = m_0$, wobei m_0 eine als bekannt angenommene positive Konstante darstellt.

5. *Erweitern Sie den Aufbau aus der vorhergehenden Aufgabe um ein Auffangbecken, das die gesamte Wassermenge aufnimmt, die aus dem Waschbecken abfließt. Zudem soll nun ebenfalls die Verdunstung berücksichtigt werden. Die Verdunstungsrate einer Wassermenge $m(t)$ betrage $v \cdot m(t)$, wobei v eine bekannte Konstante mit Einheit $1/\text{s}$ ist. Formulieren Sie die Differentialgleichungen, die die Wassermenge in den beiden Becken beschreibt. Verwenden Sie $m_1(t)$ für die Wassermenge im Waschbecken und $m_2(t)$ für die Wassermenge im Auffangbecken. Die bekannten Anfangswerte sind $m_1(0) = m_{01}$ und $m_2(0) = m_{02}$. (*1 Punkt)