Vorlesung Systemtheorie und Regelungstechnik I (SR1)
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg – Sommersemester 2023

Übungsblatt 8: Laplacetransformation und Übertragungsfunktion (zu Kapitel 6)

Prof. Dr. Moritz Diehl, Jochem De Schutter

Die folgende Tabelle beinhaltet einige Funktionen und ihre Laplacetransformierten, hierbei gilt $f(t) = 0$ für $t < 0$.

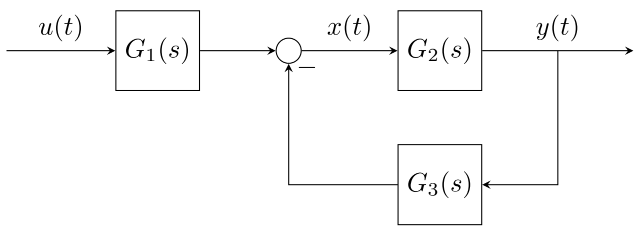
$f(t)$	$\delta(t)$	$\sigma(t)$	t	e^{-at}	$\sin(\omega t)$	$\cos(\omega t)$	$\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t}$	$a \cdot g(t) + b \cdot h(t)$
$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	1	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$s \cdot G(s)$	$a \cdot G(s) + b \cdot H(s)$

1. Beweisen Sie die oben angegebenen Laplacetransformationen der folgenden Funktionen indem Sie explizit eine vollständige Laplacetransformation durchführen. (1,5 P.)
   (a) $f(t) = \delta(t)$
   (b) $f(t) = e^{-at}$
   (c) $f(t) = \cos(\omega t)$
   TIPP: $\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right)$

2. Wie lauten die Zeitfunktionen $f(t)$ von folgenden Laplacetransformierten? Verwenden Sie die oben angegebene Tabelle und die im Skript beschriebenen Eigenschaften der Laplacetransformation. Nehmen Sie an, dass die entstehenden Zeitfunktionen kausal sind, d.h. das $f(t) = 0$ für $t < 0$ gilt. (1,5 P.)
   (a) $F(s) = \frac{4}{s}$
   (b) $F(s) = \frac{3}{s^2+9}$
   (c) $F(s) = \frac{1}{(s+2)^2}$
   Hinweis: Substituieren Sie geschickt, sodass Sie eine einfache Rücktransformation aus der Tabelle ablesen können.

3. Die Impulsantwort eines Systems sei $g(t) = 2t + \sin(\omega t)$, wobei $\omega > 0$ ein bekannter Parameter ist. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Systems. Wie lautet die Eingangs-Ausgangs-Differentialgleichung des Systems? (1 P.)

4. Betrachten Sie folgendes System (2 P.)



   wobei $G_1(s) = \frac{s+1}{s^2-2s+3}$, $G_2(s) = \frac{2}{s^2+4}$ und $G_3(s) = \frac{1}{s+2}$ gegeben sind.
   (a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$.
   (b) Wie hoch ist der Grad des Systems? Wie hoch der relative Grad?

5. Gegeben ist die E/A-Differentialgleichung $2\ddot{y} + 10\dot{y} + 12y = 4\dot{u} + 2u$. (2 P.)
   (a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion.
   (b) Berechnen Sie die Pol- und Nullstellen der Übertragungsfunktion.
   (c) Ist das System BIBO-stabil?

6. Betrachten Sie das System $\dot{x} = Ax + Bu,\ y = Cx + Du$ mit $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ und $D = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$. (2 P.)
   (a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des Systems.
   Tipp: $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.
   (b) Wie lautet die Eingangs-Ausgangs-Differentialgleichung des Systems?