Klausur Optimierung – Teil 2

31.8.2021

Abschnitt Nichtlineare Programmierung (Prof. Diehl)

Hinweis: In diesem Teil der Klausur ist bei Multiple-Choice-Fragen immer genau eine Antwortmöglichkeit richtig. Wird eine falsche, eine nichteindeutige, oder keine Antwort gegeben, gibt es 0 Punkte. Für die richtige Antwort gibt es die angegebene volle Punktzahl.

1. Betrachten Sie das folgende nichtlineare Programm (NLP). Wann ist dieses NLP auf jeden Fall konvex?

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad f(x) \qquad \text{s.t.} \qquad \begin{cases} g(x) = 0, \\ h(x) \geq 0. \end{cases}$$

(a) ☐ $f(x)$ ist konvex, $g(x)$ und $h(x)$ sind konkav.	(b) ☐ $f(x)$ ist konvex, $g(x)$ und $h(x)$ sind egal.
(c) ☒ $f(x)$ ist konvex, $g(x)$ affin und $h(x)$ konkav.	(d) ☐ $f(x)$ ist konvex, $g(x)$ konkav und $h(x)$ affin.

2

2. Betrachten Sie das folgende nichtlineare Programm (NLP). Wann ist dieses NLP ein quadratisches Programm (QP)? Hierbei ist $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $g \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $d \in \mathbb{R}$.

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad f(x) \quad \text{s.t.} \quad c(x) = 0$$

(a) ☐ $f(x) = \frac{1}{2}x^\top Qx + g^\top x, \quad c(x) = x^\top Cx + d$	(b) ☐ $f(x) = \frac{1}{2}x^\top Qx, \quad c(x) = x^\top Cx$
(c) ☐ $f(x) = g^\top x, \quad c(x) = x^\top Cx$	(d) ☒ $f(x) = \frac{1}{2}x^\top Qx + g^\top x, \quad c(x) = Ax + b$

2

3. Betrachten Sie das folgende Optimierungsproblem, mit $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $g \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$. Die Lagrangian ist definiert als $\mathcal{L}(x, \lambda) = x^\top Qx + g^\top x - \lambda^\top(Ax + b)$, mit $\lambda \in \mathbb{R}^m$. Welches ist die zugehörige KKT-Matrix?

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad x^\top Qx + g^\top x \quad \text{s.t.} \quad Ax + b = 0$$

(a) ☒ $\begin{bmatrix} Q & -A^\top \\ A & 0 \end{bmatrix}$	(b) ☐ $\begin{bmatrix} Q & g \\ A^\top & b \end{bmatrix}$	(c) ☐ $\begin{bmatrix} xx^\top & A^\top A \\ A^\top A & Q \end{bmatrix}$	(d) ☐ $\begin{bmatrix} A^\top A & Q \\ Q & 0 \end{bmatrix}$

2

4. Betrachten Sie das folgende Optimierungsproblem.

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad f(x) \qquad \text{s.t.} \qquad \begin{cases} c(x) = 0, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Welches ist das zugehörige Barriereproblem, welches im Kontext des Innere-Punkte-Verfahrens (IP) relevant ist? Hierbei ist $\mu > 0$ der Barriereparameter.

(a) ☐ $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + \sum_{i=1}^{n} \log(\mu x_i) \;\text{ s.t. }\; c(x) = 0$	(b) ☐ $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + \mu \sum_{i=1}^{n} \log(x_i) \;\text{ s.t. }\; c(x) = 0$
(c) ☐ $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) - \sum_{i=1}^{n} \log(\mu x_i) \;\text{ s.t. }\; c(x) = 0$	(d) ☒ $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) - \mu \sum_{i=1}^{n} \log(x_i) \;\text{ s.t. }\; c(x) = 0$

2

Punkte auf Seite (max. 8)

5. Betrachten Sie das folgende Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^2} \quad & x_1 \\ \text{s.t.} \quad & x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0, \end{aligned}$$

mit $x = [x_1 \quad x_2]^\top$. Die Lagrange-Funktion des Problems ist $\mathcal{L}(x, \lambda) = x_1 - \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 1)$, mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Stellen Sie die notwendigen Optimalitätsbedingungen (KKT-Bedingungen) für dieses Problem auf, so konkret wie möglich.

$$\nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda) = \begin{bmatrix} 1 - 2\lambda x_1 \\ -2\lambda x_2 \end{bmatrix} = 0$$
$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$$

2	

(b) Wir wollen dieses Problem mit dem Newton-Verfahren lösen. Wir sammeln alle Variablen in $z = [x_1 \quad x_2 \quad \lambda]^\top$ und iterieren, indem wir lineare Gleichungsysteme der Form

$$F(z^{[k]}) + J(z^{[k]})(z^{[k+1]} - z^{[k]}) = 0$$

nach $z^{[k+1]}$ lösen. Hierbei ist $F(z^{[k]}) \in \mathbb{R}^3$ und $J(z^{[k]}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Definieren Sie $F(z)$ und $J(z)$, um das Gleichungsystem für das gegebene Problem zu konkretisieren, und berechnen Sie den Wert von $F(z^{[k]})$ und $J(z^{[k]})$ für $z^{[k]} = [0 \quad -\frac{1}{2} \quad 1]$. Sie müssen das Gleichungssystem nicht lösen.

$$F(z) = \begin{bmatrix} 1 - 2\lambda x_1 \\ -2\lambda x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 \end{bmatrix} \qquad J(z) = \frac{\partial F(z)}{\partial z} = \begin{bmatrix} -2\lambda & 0 & -2x_1 \\ 0 & -2\lambda & -2x_2 \\ 2x_1 & 2x_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F(z^{[k]}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{3}{4} \end{bmatrix} \qquad J(z) = \frac{\partial F(z)}{\partial z} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

4	

Punkte auf Seite (max. 6)	