13.4 Beseitigung bleibender Regelabweichungen

Bei der bislang präsentierten Kombination aus Zustandsregler und Zustandsschätzer könnte es passieren, dass der geschlossene Kreis bei konstanter Referenzsignal $r(t) = r_{\rm ss}$ gegen einen Gleichgewichtszustand $x_{\rm ss}$ mit zugehörigen Steuerungen $u_{\rm ss}$ konvergiert, der aufgrund des in der Praxis meist unvermeidbaren Modellfehlers leider nicht die Eigenschaft hat, dass der gemessene Ausgang $y(t)$ gegen $r_{\rm ss}$ konvergiert. Eine in der Praxis weitverbreitete Methode, um diese bleibende Regelabweichung zu beseitigen, ist die Korrektur des Modells um einen additiven Störungsterm $d(t) \in \mathbb{R}^p$, der zum Ausgang hinzuaddiert wird. Die Ausgangsgleichung des Modells wird damit erweitert zu

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) + d(t).$$

Die einfachste Annahme ist, dass der unbekannte Störungsterm in der Zeit konstant ist, also der Differentialgleichung $\dot{d}(t) = 0$ gehorcht. Dieser Störungsterm $d(t)$ kann dann vom Beobachter zusammen mit dem Zustand $x(t)$ geschätzt werden. Dies erfolgt, indem das Modell im Schätzer um die p Zustände $d(t)$ erweitert wird, man also einen neuen Zustandsvektor $z(t) \in \mathbb{R}^{n+p}$ im Schätzer verwendet, der den Gleichungen

$$\dot{z}(t) = \tilde{A}z(t) + \tilde{B}u(t) \quad \text{und} \quad y(t) = \tilde{C}z(t) + \tilde{D}u(t)$$

mit den wie folgt modifizierten Matrizen gehorcht:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \ \tilde{C} = \begin{bmatrix} C | I \end{bmatrix}, \ \tilde{D} = D, \quad \text{mit} \quad z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ d(t) \end{bmatrix}.$$

Die Wahl der Kovarianzmatrizen Q und R im Kalman Filter erfolgt meist so, dass man das Zustandsrauschen im zusätzlichen Zustand $d(t)$ als eher klein annimmt, sich die Schätzung $\hat{d}(t)$ dieses Zustand sich also nur langsam verändert. Anstatt des Kalman Filters kann auch jede andere Form von Luenberger-Beobachter verwendet werden. Man beachte aber, dass die Schätzung des erweiterten Zustands nur dann zuverlässig möglich ist, wenn auch das erweiterte System $(\tilde{A}, \tilde{C})$ beobachtbar ist.

Sobald der Zuständschätzer einem eine zuverlässige Schätzung für $\hat{d}(t)$ liefert, kann der im Zustandsregler berechnete gewünschte Gleichgewichtszustand so korrigiert werden, dass er die korrigierte Ausgangsgleichung

$$r(t) = Cx_{\rm ss} + Du_{\rm ss} + \hat{d}(t) \quad \text{bzw.} \quad r(t) - \hat{d}(t) = Cx_{\rm ss} + Du_{\rm ss}$$

erfüllt. Man muss also auf der Seite des Zustandsreglers einfach nur den geschätzten Störungsterm $\hat{d}(t)$ vom gewünschten Referenzsignal $r(t)$ abziehen, bevor dieses mit den Matrizen N_x und N_u multipliziert wird. Man setzt also einfach $x_{\rm ss}(t) := N_x(r(t) - \hat{d}(t))$ und $u_{\rm ss}(t) := N_u(r(t) - \hat{d}(t))$ und gibt dann als Steuerungssignal $u(t) := u_{\rm ss}(t) - K(\hat{x}(t) - x_{\rm ss}(t))$, wie zuvor.

Man kann zeigen, dass der so modifizierte Zustandsregelkreis bei konstantem Referenzsignal $r(t) = r_{\rm ss}$ nur gegen Gleichgewichtszustände konvergieren kann, die keine bleibende Regelabweichung aufweisen (für die also $y(t)$ gegen $r_{\rm ss}$ konvergiert).