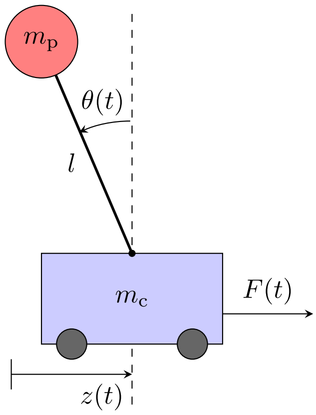
Übungsblatt 12: Zustandsregelung und Beobachter

Prof. Dr. Moritz Diehl, Jochem De Schutter

1. Betrachten Sie das folgende invertierte Pendel auf einem Wagen:



Dabei gilt:

$m_\mathrm{c} = 1$	Masse des Wagens in kg	$m_\mathrm{p} = 0.2$	Masse des Pendels in kg
$l = 0.4$	Länge des Pendels in m	$v_\mathrm{c} = 0.2$	Reibungskonstante in $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m\ s}}$
$F(t)$	Kraft zur Steuerung in N	$z(t)$	Position des Wagens in m
$\theta(t)$	Winkel des Pendels in rad	$g = 9.81$	Fallbeschleunigung in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

Das System wird durch die folgenden Differentialgleichungen beschrieben:

$$F(t) = (m_\mathrm{p} + m_\mathrm{c})\ddot{z}(t) + v_\mathrm{c}\dot{z}(t) - m_\mathrm{p} l\ddot{\theta}(t)\cos(\theta(t)) + m_\mathrm{p} l\dot{\theta}(t)^2\sin(\theta(t))$$
$$m_\mathrm{p} l^2\ddot{\theta}(t) = m_\mathrm{p} l\ddot{z}(t)\cos(\theta(t)) + m_\mathrm{p} g l\sin(\theta(t))$$

Betrachten Sie den Zustandsvektor $x(t) = [z(t)\ \dot{z}(t)\ \theta(t)\ \dot{\theta}(t)]^\top$ und den Eingang $u(t) = F(t)$.

(a) **Entwurf eines Zustandsreglers**

i. Linearisieren Sie das System $\dot{x} = f(x,u)$ für $x_\mathrm{ss} = 0$ und $u_\mathrm{ss} = 0$ und berechnen Sie die Matrizen

$$A = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{x_\mathrm{ss},u_\mathrm{ss}} \quad \text{und} \quad B = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{x_\mathrm{ss},u_\mathrm{ss}} .$$

TIPP: Linearisieren Sie zuerst die Gleichungen und lösen Sie erst dann nach $\ddot{z}(t)$ und $\ddot{\theta}(t)$ auf. (*2 P.)

ii. Betrachten Sie von jetzt ab das linearisierte System $\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2 & 1.962 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.5 & 29.43 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2.5 \end{bmatrix}^\top .$$

Ist das System (A, B) steuerbar? Begründen Sie Ihre Antwort. (*0.5 P.)

iii. (Python) Benutzen Sie den Befehl `place`, um eine Feedbackmatrix K zu berechnen, die das System stabilisiert. Die Pole des geschlossenen Kreises sollen bei den Werten -1, -1.5, -2, -2.5 liegen. (*0.5 P.)

iv. (Python) Nehmen Sie an, dass Sie alle Zustände perfekt messen können. Simulieren Sie die Antwort des geregelte System für den Anfangswert $x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}^T$. (*1 P.)

(b) **Entwurf eines Luenberger Beobachters**

Nehmen Sie nun an, dass der Zustand nicht direkt gemessen werden kann und daher mithilfe eines Zustandsschätzer bestimmt werden muss.

i. Betrachten Sie die zwei Ausgangssignale

$$y_1(t) = z(t) + 0.4 \sin\theta(t), \qquad \text{absolute Position der Pendelmasse,}$$
$$y_2(t) = \theta(t), \qquad \text{Winkel der Pendelmasse.}$$

Linearisieren Sie die Ausgangsgleichungen, um jeweils C und D zu erhalten. Wählen Sie von den beiden Ausgängen denjenigen, der am besten geeignet ist, um den Zustand des Pendels zu schätzen. Begründen Sie ihre Wahl. (*1.5 P.)

ii. Welche Bedingung muss eine Beobachtermatrix L erfüllen, damit sie zum Zustandsregler K passt? (*0.5 P.)

iii. (Python) Berechnen Sie eine passende Luenberger Beobachtermatrix L mithilfe des Befehls `place` (*0.5 P.)

(c) **Simulation des Gesamtsystems**
Berechnen Sie nun die Systemgleichungen des geschlossenen Kreises bestehend aus Strecke, Beobachter und Regler, zunächst ohne Zahlenwerte. Betrachten Sie hierfür Abbildung 13.2 auf Seite 143 des Skriptes.

i. Berechnen Sie $u(t)$ als Funktion von $r(t), \hat{x}(t)$. (*0.5 P.)

ii. Berechnen Sie $\dot{x}(t)$ als Funktion von $r(t), x(t), \hat{x}(t)$. (*0.5 P.)

iii. Berechnung Sie $\dot{\hat{x}}(t)$ als Funktion von $r(t), x(t), \hat{x}(t)$. (*0.5 P.)

iv. Der Zustand des geschlossenen Kreises ist $x_{\mathrm{CL}}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$. Berechnen Sie die Matrizen $A_{\mathrm{CL}}, B_{\mathrm{CL}}$ und C_{CL} des Zustandsraummodells des geschlossenen Kreises (*1 P.)

$$\dot{x}_{\mathrm{CL}}(t) = A_{\mathrm{CL}} \cdot x_{\mathrm{CL}}(t) + B_{\mathrm{CL}} \cdot r(t)$$
$$y(t) = C_{\mathrm{CL}} \cdot x_{\mathrm{CL}}(t)$$

als Funktion von A, B, C, K und L.

(d) (Python) Verwenden Sie von jetzt ab die Matrizen $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}$, $D = 0$ und $L = \begin{bmatrix} -3.5 & 11 & 46 & 248 \end{bmatrix}^\top$.
Simulieren Sie die Sprungantwort des geschlossenen Kreises. (*1 P.)