

Name: _____ Matrikelnummer: _____ Punkte:

/ 9

Füllen Sie bitte Ihre Daten ein und machen Sie jeweils genau ein Kreuz bei der richtigen Antwort. Sie dürfen Extrapapier für Zwischenrechnungen nutzen, aber bitte geben Sie am Ende nur dieses Blatt ab. Richtige Antworten zählen 1 Punkt, falsche, keine oder mehrere Kreuze 0 Punkte.

1. Welches der folgenden E/A-Systeme ist nicht BIBO stabil?

(a) <input type="checkbox"/> $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = u$	(b) <input checked="" type="checkbox"/> $4\ddot{y} + y = u$	(c) <input type="checkbox"/> $2\ddot{y} + 10\dot{y} + 12y = \dot{u} + 3u$	(d) <input type="checkbox"/> $\dot{y} + 3y = \dot{u} + u$
---	---	---	---

PT₂-Glied ohne Dämpfung ist nicht BIBO stabil

2. Welches der folgenden vier Systeme beschreibt NICHT das gleiche Eingangs- Ausgangsverhalten wie $\ddot{y} + 4\dot{y} + 5y = \dot{u}$?

(a) <input type="checkbox"/> $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [0 \quad 1] x$	(b) <input type="checkbox"/> $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u, \quad y = [0 \quad \frac{1}{2}] x$
(c) <input checked="" type="checkbox"/> $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [0 \quad 2] x$	(d) <input type="checkbox"/> $2\ddot{y} + 16\dot{y} = 4\dot{u} - 20y - 2\ddot{y}$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 5x_2, & \dot{x}_2 &= -x_1 - 4x_2 + u, & y &= 2x_2 \\ \ddot{x}_2 &= -\dot{x}_1 - 4\dot{x}_2 + \dot{u} = -5x_2 - 4\dot{x}_2 + \dot{u} \\ &\Rightarrow \frac{1}{2}\ddot{y} + 2\dot{y} + \frac{5}{2}y = \dot{u} \end{aligned}$$

3. Welches der folgenden Systeme mit $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx + Du$ ist in der Ruhelage $x_{ss} = u_{ss} = 0$ NICHT asymptotisch stabil nach Lyapunov?

(a) <input type="checkbox"/> $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 1], D = [0]$	(b) <input type="checkbox"/> $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0], D = [0]$
(c) <input type="checkbox"/> $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 1], D = [0]$	(d) <input checked="" type="checkbox"/> $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0], D = [0]$

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -2 & \lambda - 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 1) + 2 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda + 3 \stackrel{!}{=} 0 \\ \lambda_{1,2} &= -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - 3} \\ \lambda_{1,2} &= -\frac{-2}{2} \pm i\sqrt{2} \\ \lambda_1 &= 1 + i\sqrt{2} \\ \lambda_2 &= 1 - i\sqrt{2} \\ \Re(\lambda_{1,2}) > 0 &\Rightarrow \text{instabil} \end{aligned}$$

4. Welche Impulsantwort hat das System $\dot{y} - 4ay - cu = 0$? a und c sind Konstanten.

(a) <input checked="" type="checkbox"/> ce^{4at}	(b) <input type="checkbox"/> $4ae^{ct}$	(c) <input type="checkbox"/> $ce^{4at} + \delta t$	(d) <input type="checkbox"/> $4ae^{ct} - \delta t$
--	---	--	--

$$\begin{aligned} \dot{y} &= 4ay + cu \\ x = y &\Rightarrow \dot{x} = 4ax + cu \\ \Rightarrow A &= [4a], B = [c], C = [1], D = [0] \\ g(t) &= Ce^{At}B + D\delta(t) = ce^{4at} \end{aligned}$$

5. Welche Impulsantwort $g(t)$ mit $t > 0$ hat das System $2\dot{y} = \sqrt{u}$?

(a) <input type="checkbox"/> $\frac{1}{2}t$	(b) <input type="checkbox"/> $2t$	(c) <input type="checkbox"/> $t^{\frac{1}{2}}$	(d) <input checked="" type="checkbox"/> 0
---	-----------------------------------	--	---

$$u = 0 \Rightarrow \dot{y} = 0 \Rightarrow y = \text{konstant}$$

6. Ein LTI-System wird durch die E/A-Differentialgleichung $\ddot{y} + 5\dot{y} + 2y = 3\dot{u} + u$ beschrieben. Wie lautet das charakteristische Polynom $p_A(\lambda)$?

(a) <input checked="" type="checkbox"/> $\lambda^3 + 5\lambda^2 + 2$	(b) <input type="checkbox"/> $5\lambda^2 + 5\lambda + 2$	(c) <input type="checkbox"/> $2\lambda^3 + 10\lambda^2 + 4\lambda$	(d) <input type="checkbox"/> $\lambda^2 + 3\lambda + 1$
--	--	--	---

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 2y = 3\dot{u} + u$$

$$\Rightarrow p_A(\lambda) = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 2$$

7. Welches charakteristische Polynom $p_A(\lambda)$ hat das LTI-System $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx + Du$ mit den Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, C = [4 \quad 1] \text{ und } D = [0]$$

(a) <input type="checkbox"/> $\lambda^2 - 5\lambda - 83$	(b) <input type="checkbox"/> $\lambda^2 - 3\lambda - 71$	(c) <input checked="" type="checkbox"/> $\lambda^2 - 5\lambda - 71$	(d) <input type="checkbox"/> $\lambda^2 - 11\lambda + 83$
--	--	---	---

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - 3)(\lambda - 2) - (-11 \cdot -7) = \lambda^2 - 3\lambda - 2\lambda + 6 - 77 = \lambda^2 - 5\lambda - 71$$

8. Bestimmen Sie die Polstellen des Systems, das durch folgende E/A-Differentialgleichung beschrieben wird: $4\ddot{y} - 16y = 4\ddot{u} - u$.

(a) <input type="checkbox"/> $\{-1/2, 1/2\}$	(b) <input type="checkbox"/> $\{0, 2\}$	(c) <input type="checkbox"/> $\{-2, 0\}$	(d) <input checked="" type="checkbox"/> $\{-2, 2\}$
--	---	--	---

$$4\ddot{y} - 16y = 4\ddot{u} - u \Leftrightarrow \ddot{y} - 4y = \ddot{u} - \frac{1}{4}u$$

$$\Rightarrow p_A(\lambda) = \lambda^2 - 4$$

$$p_A(\lambda) \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2$$

9. Welches der folgenden vier Systeme ist nicht BIBO stabil? Jedes System ist durch seine Sprungantwort $h(t)$ beschrieben.

(a) <input type="checkbox"/> $\sin \frac{T}{1+t}$	(b) <input type="checkbox"/> $e^{-t} \sin t$	(c) <input checked="" type="checkbox"/> $e^t - \sin t$	(d) <input type="checkbox"/> $1 - \frac{\sin t}{t}$
---	--	--	---

Die e Funktion wächst unendlich. Kmax ist nicht endlich \Rightarrow nicht BIBO stabil