Prüfung zur Systemtheorie und Regelungstechnik I, Universität Freiburg, SoSe 2020 (Prof. Dr. M. Diehl)

Mikroklausur 1 am 02.6.2020

Name: Matrikelnummer: Punkte: / 9

Füllen Sie bitte Ihre Daten ein und machen Sie jeweils genau ein Kreuz bei der richtigen Antwort. Sie dürfen Extrapapier für Zwischenrechnungen nutzen, aber bitte geben Sie am Ende nur dieses Blatt ab. Richtige Antworten zählen 1 Punkt, falsche -1/3 Punkt, keine oder mehrere Kreuze 0 Punkte.

1. Ein hängendes Pendel, auf das eine äußere Kraft wirkt, wird durch die linearisierte DGL $I\ddot{\theta} = -mgL\theta - c\dot{\theta}L + FL$ beschrieben. Nehmen Sie $x = \begin{bmatrix}\theta \\ \dot{\theta}\end{bmatrix}$ als Zustand und $u = F$ als Eingang. Bringen Sie das System in die Form $\dot{x} = Ax + Bu$. Geben Sie A und B an.

(a) [x] $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -mgL/I & -cL/I \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ L/I \end{bmatrix}$	(b) [ ] $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -mgL & -cL \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ L \end{bmatrix}$
(c) [ ] $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ mgL/I & cL/I \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ L/I \end{bmatrix}$	(d) [ ] $A = \begin{bmatrix} mgL/I & cL/I \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} L \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix}\dot{\theta} \\ \ddot{\theta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -mgL/I \cdot x_1 - cL/I \cdot x_2 + L \cdot u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -mgL/I & -cL/I \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ L/I \end{bmatrix} u$$

2. Welche Lösung $x(t)$ hat die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = -2u(t) + x(t)$ mit dem Anfangswert $x(0) = 2$?

(a) [ ] $2e^t$	(b) [ ] $-2u(t) + \int_0^t x(\tau)d\tau$
(c) [ ] $2e^t - 2e^t \int_0^t e^{\tau}u(\tau)d\tau$	(d) [x] $2e^t - 2e^t \int_0^t e^{-\tau}u(\tau)d\tau$

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \text{ mit } A = 1, B = -2, x_0 = 2$$

$$\Rightarrow x(t) = 2e^t + \int_0^t e^{t-\tau} \cdot -2u(\tau)d\tau = 2e^t - 2e^t \int_0^t e^{-\tau}u(\tau)d\tau$$

3. Ein Quadcopter der Masse m hat vier Propeller, die beim senkrechten Flug alle mit der Geschwindigkeit u rotieren und damit eine senkrechte Kraft $4k_\mathrm{p}u^2$ erzeugen. Zusätzlich wirken die Gewichtskraft und die Luftreibung der Bewegung entgegen. Die Bewegungsgleichung des Quadkopters ist gegeben durch $m\dot{v} = -k_\mathrm{r}v^2 - mg + 4k_\mathrm{p}u^2$. Welche Geschwindigkeit v_ss stellt sich ein, wenn der Quadkopter mit konstantem Eingang u_ss betrieben wird?

(a) [ ] $-mg + 4k_\mathrm{p}u_\mathrm{ss}^2$	(b) [x] $\sqrt{\frac{-mg+4k_\mathrm{p}u_\mathrm{ss}^2}{k_\mathrm{r}}}$	(c) [ ] $\sqrt{\frac{mg-4k_\mathrm{p}u_\mathrm{ss}^2}{k_\mathrm{r}}}$	(d) [ ] $\frac{-mg+4k_\mathrm{p}u_\mathrm{ss}^2}{k_\mathrm{r}}$

$$f(v(t), u(t)) = \dot{v} = -k_\mathrm{r}/mv^2 - g + 4k_\mathrm{p}/mu^2$$

$$f(v_\mathrm{ss}, u_\mathrm{ss}) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow -k_\mathrm{r}/mv_\mathrm{ss}^2 - g + 4k_\mathrm{p}/mu_\mathrm{ss}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow v_\mathrm{ss} = \sqrt{\frac{-mg + 4k_\mathrm{p}u_\mathrm{ss}^2}{k_\mathrm{r}}}$$

4. Multiplizieren Sie $a = -4 - 2j$ mit $b = 1 + j$. Das Ergebnis ist gegeben durch:

(a) [ ] $-4 - 2j$	(b) [ ] $4 + 2j$
(c) [x] $-2 - 6j$	(d) [ ] $3 + 9j$

$$(-4 - 2j) \cdot (1 + j) = -4 - 2j - 4j - 2j^2 = -4 - 6j + 2 = -2 - 6j$$

5. Dividieren Sie $a = 3e^{-\pi j}$ durch $b = 2e^{-3\pi j}$. Das Ergebnis ist gegeben durch:

(a) [ ] $\frac{3}{2}e^{-\pi j}$	(b) [ ] $6e^{-3\pi j}$	(c) [ ] $\frac{3}{2}e^{2\pi j}$	(d) [ ] $\frac{2}{3}e^{2\pi j}$

$$\frac{3e^{-\pi j}}{2e^{-3\pi j}} = \frac{3}{2}e^{-\pi j}e^{3\pi j} = \frac{3}{2}e^{2\pi j}$$

6. Wie lautet der Imaginärteil von e^{at}/e^{jbt}?

(a) [ ] $e^{at} \cdot \sin(bt)$	(b) [ ] e^{jbt}	(c) [ ] $e^{bt} \cdot \sin(at)$	(d) [ ] $-e^{at} \cdot \sin(bt)$

$$e^{at}/e^{jbt} = e^{at}e^{-jbt} = e^{at} \cdot (\cos(bt) - j \cdot \sin(bt)) = e^{at} \cdot \cos(bt) - j \cdot e^{at} \cdot \sin(bt)$$

7. Multiplizieren Sie die beiden Matrizen A_1 und A_2 mit $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ und $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

(a) ☐ $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$	(b) ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	(c) ☐ $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$	(d) ☐ $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot -2 + 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 3 & 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$$

8. Der Traktor aus der Vorlesung wird durch die beiden Differentialgleichungen $\dot{x}_1 = V\cos(x_2)$ und $\dot{x}_2 = \frac{V}{L}\tan(u)$ beschrieben. Hierbei ist x_1 die X-Koordinate und x_2 der Orientierungswinkel des Traktors. Die Y-Koordinate sei in diesem Beispiel nicht von Interesse. Linearisieren Sie das System in der Gleichgewichtslage $u_{\text{ss}} = 0$ und $x_{\text{ss}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}^{\text{T}}$. Bringen Sie das linearisierte System in die Form $\dot{x} = Ax + Bu$, indem Sie A und B angeben.

(a) ☐ $A = \begin{bmatrix} 0 & -V \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ V/L \end{bmatrix}$	(b) ☐ $A = \begin{bmatrix} V/L & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ V\cos(1) \end{bmatrix}$
(c) ☐ $A = \begin{bmatrix} V/L & 0 \\ o & V \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	(d) ☐ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ -V/L \end{bmatrix}$

$$f(x,u) = \begin{bmatrix} V\cos(x_2) \\ \frac{V}{L}\tan(u) \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_{\text{ss}}, u_{\text{ss}}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_{\text{ss}}, u_{\text{ss}}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_{\text{ss}}, u_{\text{ss}}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_{\text{ss}}, u_{\text{ss}}) \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(x_{\text{ss}}, u_{\text{ss}}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(x_{\text{ss}}, u_{\text{ss}}) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -V\sin(x_{\text{ss}2}) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -V \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{V}{L\cos^2(u_{\text{ss}})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{V}{L} \end{bmatrix}$$

9. Bestimmen Sie das Produkt $A \cdot x$ von $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ und $x = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$.

(a) ☒ $\begin{bmatrix} -18 \\ -10 \end{bmatrix}$	(b) ☐ $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	(c) ☐ $\begin{bmatrix} 17 \\ 10 \end{bmatrix}$	(d) ☐ $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-3) \cdot 2 + 4 \cdot (-3) \\ (-2) \cdot 2 + 2 \cdot (-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 \\ -10 \end{bmatrix}$$