AGENDA (TEIL NICHTLINEARE OPTIMIERUNG)

24.1.2020 VORLESUNG 6
NICHTLINEARE OPTIMIERUNG MIT GLEICHUNGSBESCHRÄNKUNGEN
+ CASADI EINFÜHRUNG

31.1.2020 VORLESUNG 7
NICHTLINEARE OPTIMIERUNG MIT GLEICHUNGS- UND UNGLEICHUNGS-BESCHRÄNKUNGEN

7.2.2020 ÜBUNG - CASADI VIA PYTHON

TEAM: MORITZ DIEHL, PROFESSOR FÜR SYSTEMTHEORIE, REGELUNGSTECHNIK & OPTIMIERUNG

FLORIAN MESSERER DOKTORAND

1

VORL. 6: NICHTLINEARE OPTIMIERUNG MIT GLEICHUNGSBESCHRÄNKUNGEN

$$(1)\quad \boxed{\begin{array}{ll} \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} & f(x) \\ \text{s.t.} & c(x) = 0 \end{array}}$$

← NICHTLINEARES PROGRAMM (NLP)

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $f, c \in C^2$ $x \in \mathbb{R}^n$

$c: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\lambda \in \mathbb{R}^m$

KONVEX FALLS f KONVEX UND c AFFIN ($c(x) = Ax + b$).

LAGRANGE FUNKTION: $\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) - \lambda^T c(x)$

NOTWENDIGE OPTIMALITÄTSBEDINGUNGEN (KKT):
(FÜR KONVEXE PROBLEME AUCH HINREICHEND)

$$\boxed{\begin{array}{r} \nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda) = 0 \\ c(x) = 0 \end{array}}$$

SYSTEM VON $(n+m)$ GLEICHUNGEN IN $(n+m)$ VARIABLEN: IM PRINZIP EINDEUTIG LÖSBAR

6.1 ALGORITHMISCHE (AUTOMATISCHE) DIFFERENTIATION (AD)

- FUNKTIONEN $f, c, \mathcal{L}$ BESTEHEN AUS (VIELEN) ELEMENTAROPERATIONEN
- ERSTE UND HÖHERE ABLEITUNGEN KÖNNEN DURCH AD SEHR EFFIZIENT BERECHNET WERDEN: z.B. $\boxed{\text{cost}(\nabla f) \approx 3 \cdot \text{cost}(f)}$
- VIELE AD-TOOLS EXISTIEREN, z.B. CASADI

6.2 QUADRATISCHE PROGRAMME (QP) MIT GLEICHUNGSBESCHRÄNKUNGEN

NLP (1) WIRD QP FALLS:

- f LINEAR-QUADRATISCH $f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x + g^T x$
- c AFFIN, ALSO $c(x) = Ax + b$

BEMERKUNG: MATRIZEN Q, A KÖNNEN LEICHT MIT AD-TOOLS DURCH ABLEITEN AN STELLE $x=0$ GENERIERT WERDEN, DA

$$f(x) = f(0) + \underbrace{\nabla f(0)}_{=g}{}^T x + \frac{1}{2} x^T \underbrace{\nabla^2 f(0)}_{=Q} x$$

$$c(x) = \underbrace{c(0)}_{=b} + \underbrace{\frac{\partial c}{\partial x}(0)}_{=A} \cdot x$$

QP KONVEX, FALLS Q POS. SEMIDEFINIT (KLEINSTER E.V. GRÖSSER NULL)

LÖSUNG DES QP VIA KKT-BEDINGUNGEN:

$$\nabla \mathcal{L}(x, \lambda) = g + Q \cdot x - A^T \lambda \overset{!}{=} 0$$

$$c(x) = c + Ax \overset{!}{=} 0$$

LINEARES SYSTEM:

$$\begin{bmatrix} g \\ c \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} Q & -A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}}_{=\text{KKT-MATRIX}} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = 0$$

LÖSUNG:

$$\begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} Q & -A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} g \\ c \end{bmatrix}$$

6.3 NLP MIT GLEICHUNGSBESCHRÄNKUNGEN

③

ZIEL: LÖSUNG DES NICHTLINEAREN SYSTEMS

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla_x \mathcal{L}(x,\lambda) &= 0 \\ c(x) &= 0 \end{aligned}} \qquad (2)$$

DEFINIERE $z := \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix}$ $\quad z \in \mathbb{R}^{n+m}$ UND

$$F(z) := \begin{bmatrix} \nabla_x \mathcal{L}(x,\lambda) \\ c(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f(x) - \frac{\partial c}{\partial x}(x)^T \lambda \\ c(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}$$

UND $J(z) := \frac{\partial F}{\partial z}(z) = \left[\begin{array}{c|c} \nabla_x^2 \mathcal{L}(x,\lambda) & -\frac{\partial c}{\partial x}(x)^T \\ \hline \frac{\partial c}{\partial x}(x) & 0 \end{array}\right]$

$(2) \iff \boxed{F(z) = 0}$ $\qquad J(z) \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$

LÖSUNG ITERATIV DURCH NEWTON-VERFAHREN:

1) STARTE MIT ANFANGS-SCHÄTZWERT $z_0 \in \mathbb{R}^{n+m}$, SETZE $k=0$

2) LINEARISIERE $\boxed{F(z)=0}$ AN STELLE z_k (TAYLOR REIHE 1. ORDNUNG)

$$\boxed{F(z_{[k]}) + J(z_{[k]}) \cdot (z - z_{[k]}) = 0}$$

3) LÖSE DIES LINEARE SYSTEM, UM $z_{[k+1]}$ ZU ERHALTEN

$$z_{[k+1]} = z_{[k]} - J(z_{[k]})^{-1} F(z_{[k]})$$

4) STOP FALLS $\|F(z_{[k]})\| \le \varepsilon$ (MIT Z.B. $\varepsilon = 10^{-8}$)

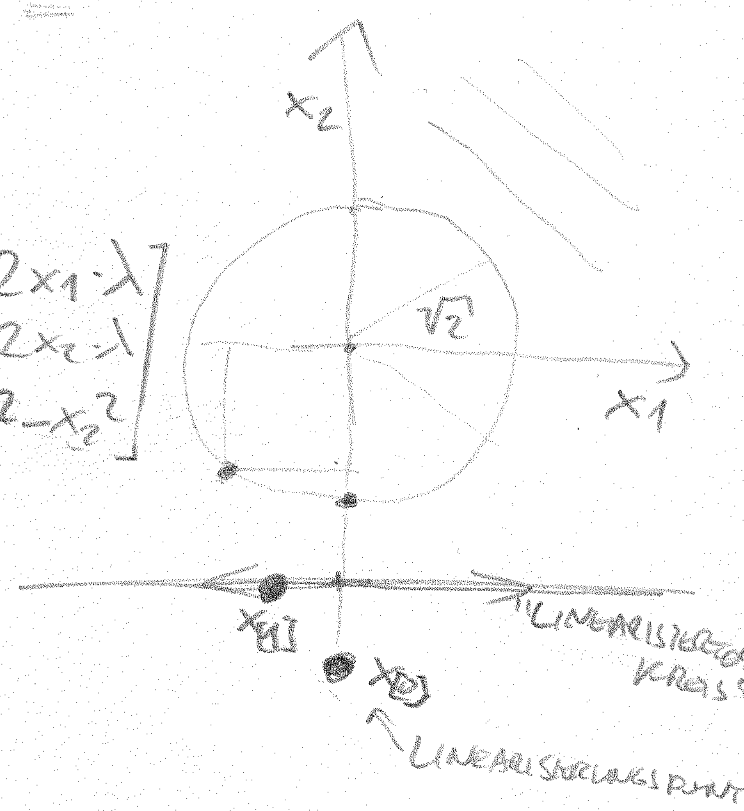
5) $k \leftarrow k+1$ UND GEHE ZU 2)

BSP: $f(x) = x_1 + x_2$

$c(x) = 2 - x_1^2 - x_2^2$

$$\bar{z} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda \end{bmatrix}$$

$$F(z) = \begin{bmatrix} \nabla f(x) - \nabla c(x) \cdot \lambda \\ c(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2x_1 \cdot \lambda \\ 1 + 2x_2 \cdot \lambda \\ 2 - x_1^2 - x_2^2 \end{bmatrix}$$



$$J(z) = \left[\begin{array}{cc|c} 2\lambda & 0 & 2x_1 \\ 0 & 2\lambda & 2x_2 \\ \hline -2x_1 & -2x_2 & 0 \end{array}\right]$$

$$z_{[0]} = \begin{bmatrix} x_{[0]} \\ \lambda_{[0]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad F(z_{[0]}) + J(z_{[0]})(z - z_{[0]})$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ \hline 0 & -4 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 - 0 \\ x_2 - 2 \\ \lambda - 1 \end{bmatrix} \overset{!}{=} 0$$

Letzte Zeile:

$$-2 + (-4)(x_2 - 2) = 0 \iff x_2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

(x_1 frei)

Erste Zeile:

$$1 + 2x_1 = 0 \iff x_1 = -\frac{1}{2}$$

Mittlere Zeile:

$$4 + 2 \cdot \underbrace{\left(\tfrac{3}{2} - 2\right)}_{-\frac{1}{2}} + 4(\lambda - 1) = 0 \iff \lambda = 1 - \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

$$z_{[1]} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$