Vorlesung Systemtheorie und Regelungstechnik I (SR1)
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg – Sommersemester 2018

Übungsblatt 3: Lineare Systeme (zu Kapitel 2)

Prof. Dr. Moritz Diehl, Dr. Jörg Fischer und Lukas Klar

1. Sind die folgenden Differentialgleichungen (DGL) mit Eingangssignal $u(t)$, Ausgangssignal $y(t)$ und konstantem Parameter k *linear* und/oder *zeitinvariant*? Beweisen Sie Ihre Aussagen. (3 Punkte)

   (a) $\dot{y}(t) = \sin(t) \cdot y(t) - ku(t)$

   (b) $\dot{y}(t) = y(t) \cdot u(t)$

   Tipp: Linearität kann bewiesen werden, indem man von zwei Lösungstrajektorien $u_1(t), y_1(t)$ und $u_2(t), y_2(t)$ ausgeht und explizit zeigt, dass jede Linearkombination dieser Lösungstrajektorien eine Lösung der DGL darstellt. Zeitinvarianz kann bewiesen werden, indem man von einer Lösungstrajektorie ausgeht und explizit zeigt, dass diese auch nach einer beliebigen Verschiebung in der Zeit immer noch eine Lösung der Differentialgleichung darstellt.

2. In dieser Aufgabe soll das nichtlineare Waschbeckenmodell (ohne Auffangbecken) des ersten Übungsblatts um eine Ruhelage linearisiert werden. Das Waschbecken mit Zufluss $u(t)$ und Wassermenge $x(t)$ wird durch die ODE

   $$\dot{x}(t) = u(t) - k\sqrt{x(t)}$$

   beschrieben. (4 Punkte)

   (a) Berechnen Sie den Gleichgewichtszustand x_{ss} als Funktion von der konstanten Flussrate u_{ss}.

   (b) Linearisieren Sie das System für kleine Abweichungen $(\delta x(t), \delta u(t)))$ von der Ruhelage (x_{ss}, u_{ss}), um eine ODE der folgenden Form zu erhalten:

   $$\delta\dot{x}(t) = A\ \delta x(t) + B\ \delta u(t).$$

   (c) Nehmen Sie nun an, dass $k = 0.60\frac{\sqrt{\mathrm{kg}}}{\mathrm{s}}$ und $u_{\mathrm{ss}} = 2.4\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$. Berechnen Sie x_{ss}, A, und B.

   (d) Betrachten Sie nun ein erweitertes Waschbecken, das außer der Wassermenge $x_1(t)$ noch die Wassertemperatur $x_2(t)$ observiert. Anfangs befindet sich eine Wassermenge m_0 der Temperatur $T_0 = T_a$ im Becken. Das einfließende Wasser hat die Temperatur T_h. Da das Wasser im Becken zudem Wärmeenergie an die Umgebung abgibt, entstehen Wärmeverluste mit einer Wärmeverlustleistung von $k_2 \cdot C \cdot m(t) \cdot (x_2(t) - T_a)$, wobei k_2 eine Konstante mit Einheit $1/s$, die Konstante C die spezifische Wärmekapazität des Wassers mit Einheit $J/(kg \cdot K)$ und T_a die Umgebungstemperatur ist. Dieses System wird durch die ODE

   $$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -k_1\sqrt{x_1(t)} + u(t) \\ -k_2(x_2(t) - T_a) + \frac{T_{\mathrm{h}} - x_2(t)}{x_1(t)}u(t) \end{bmatrix}$$

   beschrieben. Führen Sie die Schritte a) bis c) erneut durch unter der Annahme, dass $T_{\mathrm{h}} = 340\,\mathrm{K}, T_a = 300\,\mathrm{K}$, $k_1 = 0.60\frac{\sqrt{\mathrm{kg}}}{\mathrm{s}}, k_2 = 0.1\frac{1}{\mathrm{s}}$ und $u_{\mathrm{ss}} = 2.4\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$.

3. (MATLAB®) In dieser Aufgabe wollen wir das Waschbecken (mit Temperatur) aus Aufgabe 2d) für das nichtlineare Modell und das lineare Modell simulieren und vergleichen. Als Vorlage wird Ihnen eine Simulation des gesteuerten Traktors aus dem Skript (Kap. 2.2) zur Verfügung gestellt. Die Traktorsimulation besteht aus folgenden Dateien, die Sie von der Kurswebseite herunter laden können. (3 Punkte)

Dateiname	Typ	Beschreibung
`tractor_simulate.m`	script	Definiert Simulationsparameter (Anfangswert, Zeitschritte,...) und startet die Simulation
`tractor_ode_nl.m`	function	Definiert die nichtlineare Zustandsgleichung des Traktormodells
`tractor_out.m`	function	Definiert die Ausgangsgleichung des Traktormodells
`rk.m`	function	Runge-Kutta Verfahren zur Simulation eines Zeitschritts (vgl. Kap. 2.8)
`nlsim.m`	function	Funktion, die mittels `rk.m` für eine Eingangstrajektorie die Ausgangstrajektorie simuliert. **Die Funktion werden wir häufig verwenden.**

   (a) Machen Sie sich mit den einzelnen Dateien vertraut und führen Sie `tractor_simulate.m` aus.

   (b) Verändern Sie die Datei `tractor_simulate.m`, sodass nicht das Ausgangssignal sondern die Zustände des Traktors geplottet werden.

   (c) Erstellen Sie eine Funktion `sink_ode_nl` die die nichtlineare ODE des Waschbeckens implementiert. Als Vorlage können Sie die Datei `tractor_ode_nl.m` verwenden.

(d) Schreiben Sie ein Script `sink_simulate.m`, das das Waschbecken simuliert. Verwenden Sie als Anfangswert $x_0 = [1; 300]$ und als Eingang einen konstanten Wert von $u = 2.4$ (step input). Ausgangsgröße ist die Masse $x_1(t)$. Erreicht Ihre Simulation den vorhergesagten Gleichgewichtspunkt?

(e) *Erstellen Sie eine Funktion `sink_ode_l` die das linearisierte Verhalten implementiert. Als Vorlage können Sie erneut die Datei `tractor_ode_nl.m` verwenden.

(f) *Erweitern Sie ihr Script `sink_simulate.m` nun um zusätzlich das lineare System zu simulieren. Vergleichen Sie die Ergebnisse der linearen und nichtlinearen Implementierung. Wo ist die Abweichung am größten? Warum?