Prüfung zur Systemtheorie und Regelungstechnik I, Universität Freiburg, SoSe 2017 (Prof. Dr. M. Diehl)

Mikroklausur 2 am 22.6.2017

Übungsgruppe: 1 ☐ Patrick Caspari	2 ☐ Alexander Petrov	3 ☐ Peter Hofmeier	4 ☐ Fabien Jenne

Name: Matrikelnummer: Punkte: / 9

Füllen Sie bitte Ihre Daten ein und machen Sie jeweils genau ein Kreuz bei der richtigen Antwort. Sie dürfen Extrapapier für Zwischenrechnungen nutzen, aber bitte geben Sie am Ende nur dieses Blatt ab. Richtige Antworten zählen 1 Punkt, falsche, keine oder mehrere Kreuze 0 Punkte.

1. Welches charakteristische Polynom $p_A(\lambda)$ hat das LTI-System $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx + Du$ mit den Matrizen $A = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 7 & 1 \end{bmatrix}$ und $D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$?

(a) ☐ $\lambda^2 - 16\lambda - 43$	(b) ☐ $\lambda^2 + 16\lambda + 43$	(c) ☒ $\lambda^2 - 16\lambda + 43$	(d) ☐ $\lambda^2 + 16\lambda - 43$

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - 9)(\lambda - 7) - (-4 \cdot -5) = \lambda^2 - 7\lambda - 9\lambda + 63 - 20 = \lambda^2 - 16\lambda + 43$$

2. Ein LTI-System wird durch die E/A-Differentialgleichung $5\ddot{y}+15\dot{y}+10y = 10\dot{u}+5u$ beschrieben. Wie lautet das charakteristische Polynom $p_A(\lambda)$?

(a) ☒ $\lambda^2 + 3\lambda + 2$	(b) ☐ $5\lambda^2 + 15\lambda - 10$	(c) ☐ $5\lambda^2 + 15\lambda - 5$	(d) ☐ $5\lambda^3 + 15\lambda^2 + 10\lambda$

$$5\ddot{y} + 15\dot{y} + 10y = 10\dot{u} + 5u \Leftrightarrow \ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 2\dot{u} + u$$
$$\Rightarrow p_A(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

3. Bestimmen Sie die Polstellen des Systems, das durch folgende E/A-Differentialgleichung beschrieben wird: $8\ddot{y}-32y = 16\ddot{u}-4u$.

(a) ☐ $\{-1/2, 1/2\}$	(b) ☐ $\{0, 2\}$	(c) ☐ $\{-2, 0\}$	(d) ☒ $\{-2, 2\}$

$$8\ddot{y} - 32y = 16\ddot{u} - 4u \Leftrightarrow \ddot{y} - 4y = 2\ddot{u} - \frac{1}{2}u$$
$$\Rightarrow p_A(\lambda) = \lambda^2 - 4$$
$$p_A(\lambda) \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2$$

4. Welches der folgenden vier Systeme beschreibt NICHT das gleiche Eingangs- Ausgangsverhalten wie $\ddot{y} - 2y = 4\dot{u}$?

(a) ☐ $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$	(b) ☐ $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} x$
(c) ☒ $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$	(d) ☐ $-10y = 20\dot{u} - 5\ddot{y}$

$$\dot{x}_1 = x_2 - 4u, \quad \dot{x}_2 = -2x_1, \quad y = x_1$$
$$\ddot{x}_1 = \dot{x}_2 - 4\dot{u} = -2x_1 - 4\dot{u}$$
$$\Rightarrow \ddot{y} + 2y = -4\dot{u}$$

5. Welches der folgenden Systeme mit $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$ ist in der Ruhelage $x_{\text{ss}} = u_{\text{ss}} = 0$ asymptotisch stabil nach Lyapunov?

(a) ☐ $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [1\ 0], D = [0]$	(b) ☐ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [0\ 1], D = [0]$
(c) ☐ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, C = [1\ 0], D = [0]$	(d) ☒ $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [0\ 1], D = [0]$

$$\begin{aligned}
\det(\lambda I - A) &= \det(\begin{bmatrix} \lambda+2 & -2 \\ 0 & \lambda+1 \end{bmatrix}) \\
&= (\lambda+2)(\lambda+1) \\
&= \lambda^2 + 3\lambda + 2 \overset{!}{=} 0 \\
\lambda_{1,2} &= -\frac{3}{2} \pm \sqrt{(\frac{3}{2})^2 - 2} \\
\lambda_{1,2} &= -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \\
\lambda_1 &= -1 \\
\lambda_2 &= -2 \\
\Re(\lambda_{1,2}) < 0 &\Rightarrow \text{asymptotisch stabil}
\end{aligned}$$

6. Welches der folgenden vier Systeme ist nicht BIBO stabil? Jedes System ist durch seine Sprungantwort $h(t)$ beschrieben. T ist eine positive Konstante.

(a) ☐ $e^{-t}(\cos t + \sin t)$	(b) ☐ $e^{-t} - 5$	(c) ☒ $1 - \cos\frac{t}{T}$	(d) ☐ $\cos t e^{-t}$

Es handelt sich um die Sprungantwort eines ungedämpftem PT2-Gliedes. Ungedämpfte Oszillation ⇒ nicht BIBO stabil

7. Welche Sprungantwort $h(t)$ mit $t > 0$ hat das System $2\dot{y} = \sqrt{u}$?

(a) ☐ $\frac{1}{2}t^2$	(b) ☐ $2t$	(c) ☐ $t^{\frac{1}{2}}$	(d) ☒ $\frac{1}{2}t$

$$u = 1 \Rightarrow \dot{y} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}t$$

8. Welche Impulsantwort hat das System $0.5\dot{y} + ky - u = 0$? k ist eine Konstante.

(a) ☐ $2e^{2kt}$	(b) ☒ $2e^{-2kt}$	(c) ☐ $\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}kt}$	(d) ☐ $1 - 2e^{2kt}$

$$\begin{gathered}
\dot{y} = -2\,k\,y + 2\,u \\
x = y \Rightarrow \dot{x} = -2\,k\,x + 2\,u \\
\Rightarrow A = [-2\,k], B = [2], C = [1], D = [0] \\
g(t) = Ce^{At}B + D\delta(t) = 2e^{-2kt}
\end{gathered}$$

9. Welches der folgenden E/A-Systeme ist nicht BIBO stabil? T ist eine positive Konstante.

(a) ☐ $\ddot{y} + 4\dot{y} + 5y = u$	(b) ☐ $\dot{y} + 3y = \dot{u} + u$	(c) ☒ $T^2\ddot{y} + y = u$	(d) ☐ $\ddot{y} + 5\dot{y} + y = \ddot{u} + u$

PT_2-Glied ohne Dämpfung ist nicht BIBO stabil