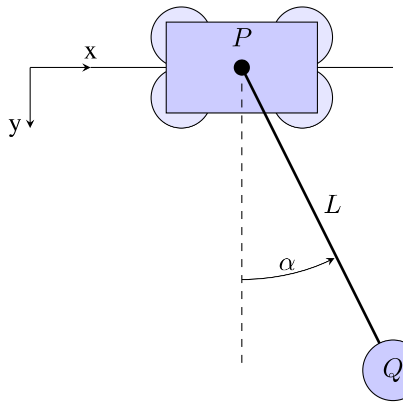
Vorlesung Systemtheorie und Regelungstechnik I (SR1)
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg – Sommersemester 2015

Übungsblatt 2: Modellierung und ODEs
(Abgabe am 9.5.2015 um 8:15 im Vorlesungs-Hörsaal)

Prof. Dr. Moritz Diehl, Dr. Jörg Fischer und Lukas Klar

1. Leiten Sie ein System von Differentialgleichungen der Form $\dot{x} = f(x, u)$ für die unten beschriebenen Betriebsarten eines Krans her. Es wird angenommen, dass sich alle Bewegungen nur in einer (senkrecht orientierten) Ebene abspielen. Die Leine der Länge L ist immer gerade gespannt und hat keine Masse. Die Last, die an der Leine hängt, wird als Punktmasse im Ort $Q = (Q_\mathrm{x}, Q_\mathrm{y})$ modelliert. Die Position des Schienenwagens ist $P = (P_\mathrm{x}, 0)$ und der Winkel der Leine zur y-Achse nennen wir α. Die Erdbeschleunigung g wirkt in y-Richtung.



   (a) In der ersten Betriebsart kann der Kran die Leinenlänge verändern aber nicht die Wagenposition ($P = 0$ und $\alpha = 0$). Steuerung ist die Beschleunigung des Leinenantriebs $u_1 = \ddot{L}$. Zustände sind die Leinenlänge L und die Geschwindigkeit der Leine $\dot{L}$. Stellen Sie die ODE $\dot{x} = f(x, u_1)$ des Systems auf. (4 Punkte)

   (b) In der zweiten Betriebsart kann der Kran die Wagenposition verändern aber nicht die Leinenlänge ($L = L_0$). Steuerung ist die Beschleunigung u_2 des waagrecht fahrenden Schienenwagens. Wie viele und welche Zustände x brauchen wir, um die Dynamik des Systems zu beschreiben? Stellen Sie die ODE $\dot{x} = f(x, u_2)$ des Systems auf. (5 Punkte)

   TIPP: Berechnen Sie erst die Position Q der Masse in kartesischen Koordinaten als Funktion von P und α. Berechnen Sie dann $\ddot{Q}$ und betrachten Sie nun die Beschleunigung nur in der Richtung, die orthogonal zur Leine ist. Was ist die Ursache dieser Beschleunigung? Welche Kräfte bzw. Beschleunigungen können durch das Seil übertragen werden?

   (c) In der dritten Betriebsart kann der Kran sowohl die Wagenposition als auch die Leinenlänge verändern. Er hat die beiden zuvor erwähnten Eingänge u_1 und u_2. Dadurch kann die Last beliebig in der zweidimensionalen Ebene positioniert werden. Wie viele und welche Zustände x brauchen wir, um die Dynamik des Systems zu beschreiben? Stellen Sie die ODE $\dot{x} = f(x, u)$ des Systems auf. (3 Punkte)

   TIPP: Gleiches Vorgehen wie in Aufgabenteil (b).

2. Modellieren Sie die Temperatur $T(t)$ (gemessen in K) und Wassermenge $m(t)$ (in kg) in einem Waschbecken mittels einer Differentialgleichung der Form $\dot{x} = f(x, u)$. In das Waschbecken fließt heißes Wasser der konstanten Temperatur T_h mit variabler Massenflussrate $u(t)$ (gemessen in kg/s) durch den Wasserhahn zu. Zudem gibt es einen Ausfluss, da der Stöpsel offen ist. Der Ausfluss habe die Massenflussrate $k_1 \cdot \sqrt{m(t)}$, wobei k_1 eine positive Konstante mit Einheit $\sqrt{\mathrm{kg}}$/s ist. Da das Wasser im Waschbecken zudem Wärmeenergie an die Umgebung abgibt, entstehen Wärmeverluste mit einer Wärmeverlustleistung von $k_2 \cdot C \cdot m(t) \cdot (T(t) - T_0)$, wobei k_2 eine Konstante mit Einheit 1/s, die Konstante C die spezifische Wärmekapazität des Wassers mit Einheit $\mathrm{J}/(\mathrm{kg} \cdot \mathrm{K})$ und T_0 die Umgebungstemperatur ist. Skizzieren Sie das Waschbecken mit den ein- und ausgehenden Wasser- und Energieströmen, und finden Sie eine gewöhnliche Differentialgleichung der Form $\dot{x} = f(x, u)$ mit

$$x = \begin{bmatrix} m(t) \\ T(t) \end{bmatrix} .$$

   (Sie dürfen bei der Herleitung annehmen, dass die Masse $m(t)$ immer strikt positiv bleibt.) (4 Punkte)

   Tipp: Nutzen Sie zur Herleitung von $\dot{T}$ den Energieerhaltungssatz, d.h. dass die Änderung der Wärmeenergie im Waschbecken der Differenz aus zugeführter und abgeführter Wärmeleistung entspricht. Die Wärmeenergie ist gegeben durch $E(t) = C \cdot T(t) \cdot m(t)$. Beachten Sie die Produktregel bei der Berechnung von $\dot{E}(t)$.