Prüfung zur Systemtheorie und Regelungstechnik I, Universität Freiburg, SoSe 2019 (Prof. Dr. M. Diehl)

Mikroklausur 1 am 17.5.2019

Übungsgruppe: 1 ☐ Adil Younas | 2 ☐ Vanessa Graf | 3 ☐ Max Schlichting

Name: Matrikelnummer: Punkte: /9

Füllen Sie bitte Ihre Daten ein und machen Sie jeweils genau ein Kreuz bei der richtigen Antwort. Sie dürfen Extrapapier für Zwischenrechnungen nutzen, aber bitte geben Sie am Ende nur dieses Blatt ab. Richtige Antworten zählen 1 Punkt, keine oder mehrere Kreuze 0 Punkte.

1. Ein Fahrzeug muss einen steilen Berg hinauffahren. Der Zustand des Systems ist gegeben durch die Position p und die Geschwindigkeit v. Der Eingang des Systems ist die Antriebskraft u. Es gilt $\dot{v} = 0.01\cos(2p) + 0.2u$. Linearisieren Sie das System um $p_{\text{ss}} = \frac{\pi}{4}$, $v_{\text{ss}} = 1$ und $u_{\text{ss}} = 0$ Bringen Sie das System in die Form $\dot{x} = Ax + Bu$. Geben Sie A und B an.

(a) ☐ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.02 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \end{bmatrix}$	(b) ☐ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.01 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \end{bmatrix}$
(c) ☐ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.02 & 0.2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.2 \end{bmatrix}$	(d) ☐ $A = \begin{bmatrix} -0.01 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.2 \end{bmatrix}$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} v \\ 0.01\cos(2p) + 0.2u \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.01 \cdot 2 \cdot \sin(2p_{\text{ss}}) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.02 & 0 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

2. Welche Lösung $x(t)$ hat die Differentialgleichung $\frac{-1}{2}\dot{x}(t) = x(t) + \frac{1}{2}u(t)$ mit dem Anfangswert $x(0) = -2$?

(a) ☐ $-2e^{-2t} - e^{-2t}\int_0^t e^{-2\tau}u(\tau)d\tau$	(b) ☐ $-e^{-2t}(2 + \int_0^t e^{2\tau}u(\tau)d\tau)$
(c) ☐ $2e^{2t} - e^{2t}\int_0^t e^{-2\tau}u(\tau)d\tau$	(d) ☐ $e^{2t}(2 + \int_0^t e^{-2\tau}u(\tau)d\tau)$

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \text{ mit } A = -2, B = -1, x_0 = -2$$

$$\Rightarrow x(t) = -2e^{-2t} + \int_0^t e^{-2(t-\tau)} \cdot (-u(\tau))d\tau = -2e^{-2t} - e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau}u(\tau)d\tau$$

$$= -e^{-2t}(2 + \int_0^t e^{2\tau}u(\tau)d\tau$$

3. Die Temperatur der Flamme eines Bunsenbrenners wird durch T beschrieben. Die Stärke der Flamme kann man durch das Drehen des Ventils regulieren, dabei ist der Drehwinkel $\theta > 0$ die Steuergröße. Die Temperatur der Flamme wird durch folgende Gleichung $\dot{T} = k_1\theta - k_2(T - T_0)^3$ angegeben, wobei k_1, k_2 und T_0 positive Konstanten sind. Wie groß ist die Temperatur T_{ss}, die sich bei einem konstanten Winkel θ_{ss} einstellt?

(a) ☐ $\frac{k_1\theta_{\text{ss}}}{k_2} + T_0$	(b) ☐ $\sqrt[3]{\frac{k_1\theta_{\text{ss}} + T_0}{k_2}}$	(c) ☐ $k_1\theta_{\text{ss}} + T_0 k_2$	(d) ☒ $\sqrt[3]{\frac{k_1\theta_{\text{ss}}}{k_2}} + T_0$

$$f(x_{\text{ss}}, u_{\text{ss}}) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow k_1\theta_{\text{ss}} - k_2(T_{\text{ss}} - T_0)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow T_{\text{ss}} = \sqrt[3]{\frac{k_1\theta_{\text{ss}}}{k_2}} + T_0$$

4. Berechnen Sie $(-3 + 6j)/(2 - 4j)$. Das Ergebnis ist gegeben durch:

(a) ☐ 1.5	(b) ☐ -1.5
(c) ☐ $0.9 + 1.2j$	(d) ☐ $0.9 - 1.2j$

$$(-3 + 6j)/(2 - 4j) = \frac{(-3 + 6j) \cdot (2 + 4j)}{(2 - 4j) \cdot (2 + 4j)} = \frac{-6 - 12j + 12j - 24}{4 + 16} = \frac{-30}{20} = -1.5$$

5. Dividieren Sie $a = -2e^{-5j}$ durch $b = \frac{2}{5}e^{4j}$. Das Ergebnis ist gegeben durch:

(a) ☐ $-5e^{-20j}$	(b) ☐ $5e^{20j}$	(c) ☐ $-5e^{9j}$	(d) ☐ $-5e^{-9j}$

$$-2e^{-5j}/(\frac{2}{5}e^{4j}) = -2e^{-5j} \cdot \frac{5}{2}e^{-4j} = -5e^{(-5-4)j} = -5e^{-9j}$$

6. Wie lautet der Imaginärteil von $e^{(a+bj+cj^2)t}$?

(a) ☐ $e^{(a-c)t} \cdot \sin(bt)$	(b) ☐ $e^{(a+c)t} \cdot \sin(bt)$	(c) ☐ $e^{(a-c)t} \cdot \cos(bt)$	(d) ☐ $e^{(a+c)t} \cdot \cos(bt)$

$$\Im((e^{(a+bj+cj^2)t}) = \Im(e^{(a-c)t}e^{jbt}) = \Im(e^{(a-c)t} \cdot (\cos(bt) + j\sin(bt))) = e^{(a-c)t}\sin(bt)$$

7. Multiplizieren Sie die beiden Matrizen A_1 und A_2 mit $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ und $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

(a) ☐ $\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 18 & -8 \end{bmatrix}$	(b) ☐ $\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 18 & -8 \end{bmatrix}$	(c) ☐ $\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 18 & 8 \end{bmatrix}$	(d) ☐ $\begin{bmatrix} -8 & 4 \\ -18 & 8 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) \\ 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 & 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 18 & -8 \end{bmatrix}$$

8. Die Lotka-Volterra Gleichungen beschreiben die Beziehung einer Raubtierpopulation $x_1(t)$ zu seiner Beutetierpopulation $x_2(t)$. Sie werden durch zwei nichtlineare DGL beschrieben: $\dot{x}_1(t) = -ax_1(t) + bx_1(t)x_2(t) - u(t)$ und $\dot{x}_2(t) = cx_2(t) - dx_1(t)x_2(t)$. Linearisieren Sie das System um $x_{ss} = \left[\frac{c}{d}, 1 + \frac{a}{b}\right]^T$ und $u_{ss} = \frac{bc}{d}$. Geben Sie die Matrizen A und B des linearisierten Systems $\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u}$ an.

(a) ☐ $A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{bc}{d} \\ \frac{da}{b} & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	(b) ☐ $A = \begin{bmatrix} b-a & b \\ -d & c-d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$
(c) ☐ $A = \begin{bmatrix} b & \frac{bc}{d} \\ -d + \frac{da}{b} & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$	(d) ☐ $A = \begin{bmatrix} b & \frac{bc}{d} \\ -d(1+\frac{a}{b}) & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$f(x,u) = \begin{bmatrix} -ax_1(t) + bx_1(t)x_2(t) - u(t) \\ cx_2(t) - dx_1(t)x_2(t) \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_{\text{ss}}, u_{\text{ss}}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_{\text{ss}}, u_{\text{ss}}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_{\text{ss}}, u_{\text{ss}}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_{\text{ss}}, u_{\text{ss}}) \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(x_{\text{ss}}, u_{\text{ss}}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(x_{\text{ss}}, u_{\text{ss}}) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -a + bx_{2,ss} & bx_{1,ss} \\ -dx_{2,ss} & c - dx_{1,ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & \frac{bc}{d} \\ -d - \frac{da}{b} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

9. Bestimmen Sie das Produkt $A^T \cdot x$ von $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ und $x = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(a) ☐ $\begin{bmatrix} 8 \\ -8 \end{bmatrix}$	(b) ☐ $\begin{bmatrix} -8 \\ 8 \end{bmatrix}$	(c) ☐ $\begin{bmatrix} 4 \\ -12 \end{bmatrix}$	(d) ☐ $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 \\ 2 \cdot 4 + (-4) \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$