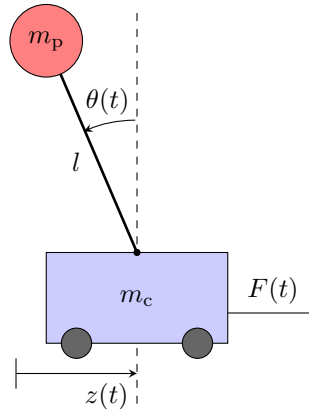


## Übungsblatt 12: Zustandsregelung und Beobachter

Prof. Dr. Moritz Diehl, Dr. Jochem De Schutter

1. Betrachten Sie das folgende invertierte Pendel auf einem Wagen:



Dabei gilt:

$m_c = 1$	Masse des Wagens in kg	$m_p = 0.2$	Masse des Pendels in kg
$l = 0.4$	Länge des Pendels in m	$v_c = 0.2$	Reibungskonstante in $\frac{N}{m \cdot s}$
$F(t)$	Kraft zur Steuerung in N	$z(t)$	Position des Wagens in m
$\theta(t)$	Winkel des Pendels in rad	$g = 9.81$	Fallbeschleunigung in $\frac{m}{s^2}$

Das System wird durch die folgenden Differentialgleichungen beschrieben:

$$F(t) = (m_p + m_c)\ddot{z}(t) + v_c\dot{z}(t) - m_p l \ddot{\theta}(t) \cos(\theta(t)) + m_p l \dot{\theta}(t)^2 \sin(\theta(t))$$

$$m_p l^2 \ddot{\theta}(t) = m_p l \ddot{z}(t) \cos(\theta(t)) + m_p g l \sin(\theta(t))$$

Betrachten Sie den Zustandsvektor  $x(t) = [z(t) \dot{z}(t) \theta(t) \dot{\theta}(t)]^T$  und den Eingang  $u(t) = F(t)$ .

(a) **Entwurf eines Zustandsreglers**

i. Linearisieren Sie das System  $\dot{x} = f(x, u)$  für  $x_{ss} = 0$  und  $u_{ss} = 0$  und berechnen Sie die Matrizen

$$A = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{x_{ss}, u_{ss}} \quad \text{und} \quad B = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{x_{ss}, u_{ss}}.$$

TIPP: Linearisieren Sie zuerst die Gleichungen und lösen Sie erst dann nach  $\ddot{z}(t)$  und  $\ddot{\theta}(t)$  auf. (\*2 P.)

ii. Betrachten Sie von jetzt ab das linearisierte System  $\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$  mit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2 & 1.962 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.5 & 29.43 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = [0 \ 1 \ 0 \ 2.5]^T.$$

Ist das System  $(A, B)$  steuerbar? Begründen Sie Ihre Antwort. (\*0.5 P.)

iii. (Python) Benutzen Sie den Befehl `place`, um eine Feedbackmatrix  $K$  zu berechnen, die das System stabilisiert. Die Pole des geschlossenen Kreises sollen bei den Werten -1, -1.5, -2, -2.5 liegen. (\*0.5 P.)

iv. (Python) Nehmen Sie an, dass Sie alle Zustände perfekt messen können. Simulieren Sie die Antwort des geregelte System für den Anfangswert  $x(0) = [0 \ 0 \ 0.5 \ 0]^T$ . (\*1 P.)

(b) **Entwurf eines Luenberger Beobachters**

Nehmen Sie nun an, dass der Zustand nicht direkt gemessen werden kann und daher mithilfe eines Zustandsschätzer bestimmt werden muss.

i. Betrachten Sie die zwei Ausgangssignale

$$y_1(t) = z(t) + 0.4 \sin \theta(t),$$

$$y_2(t) = \theta(t),$$

absolute Position der Pendelmasse,

Winkel der Pendelmasse.

Linearisieren Sie die Ausgangsgleichungen, um jeweils  $C$  und  $D$  zu erhalten. Wählen Sie von den beiden Ausgängen denjenigen, der am besten geeignet ist, um den Zustand des Pendels zu schätzen. Begründen Sie ihre Wahl. (\*1.5 P.)

ii. Welche Bedingung muss eine Beobachtermatrix  $L$  erfüllen, damit sie zum Zustandsregler  $K$  passt? (\*0.5 P.)

iii. (Python) Berechnen Sie eine passende Luenberger Beobachtermatrix  $L$  mithilfe des Befehls `place` (\*0.5 P.)

(c) **Simulation des Gesamtsystems**

Berechnen Sie nun die Systemgleichungen des geschlossenen Kreises bestehend aus Strecke, Beobachter und Regler, zunächst ohne Zahlenwerte. Betrachten Sie hierfür Abbildung 13.2 auf Seite 143 des Skriptes.

i. Berechnen Sie  $u(t)$  als Funktion von  $r(t)$ ,  $\hat{x}(t)$ . (\*0.5 P.)

ii. Berechnen Sie  $\dot{x}(t)$  als Funktion von  $r(t)$ ,  $x(t)$ ,  $\hat{x}(t)$ . (\*0.5 P.)

iii. Berechnen Sie  $\hat{x}(t)$  als Funktion von  $r(t)$ ,  $x(t)$ ,  $\hat{x}(t)$ . (\*0.5 P.)

iv. Der Zustand des geschlossenen Kreises ist  $x_{\text{CL}}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$ . Berechnen Sie die Matrizen  $A_{\text{CL}}$ ,  $B_{\text{CL}}$  und  $C_{\text{CL}}$  des Zustandsraummodells des geschlossenen Kreises (\*1 P.)

$$\dot{x}_{\text{CL}}(t) = A_{\text{CL}} \cdot x_{\text{CL}}(t) + B_{\text{CL}} \cdot r(t)$$

$$y(t) = C_{\text{CL}} \cdot x_{\text{CL}}(t)$$

als Funktion von  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $K$  und  $L$ .

(d) (Python) Verwenden Sie von jetzt ab die Matrizen  $C = [1 \ 0 \ 0.4 \ 0]$ ,  $D = 0$  und  $L = [-3.5 \ 11 \ 46 \ 248]^T$ . Simulieren Sie die Sprungantwort des geschlossenen Kreises. (\*1 P.)