

## Übung 5: Nichtlineare Programmierung und CasADi

Prof. Moritz Diehl, Florian Messerer

### LÖSUNG

---

## Einführung in CasADi

CasADi<sup>1</sup> ist eine open-source Toolbox zur schnellen Implementierung von nichtlinearen Optimierungsproblemen. Der CasADi Code selber ist in C++ geschrieben, aber es gibt Interfaces für Python, Matlab und Octave. Ableitungen werden automatisch über Algorithmische Differenzierung (AD) berechnet, ein effizientes und gleichzeitig präzises Verfahren. Zum Lösen der Probleme kann CasADi diese an verschiedene (alleinstehende) Solver übergeben. Der open-source Solver IPOPT, ein nichtlineares Innere-Punkt-Verfahren, ist in einer CasADi-Installation bereits enthalten.

Nichtlineare Programme werden in CasADi in der Standardform

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & x_{\text{lb}} \leq x \leq x_{\text{ub}}, \\ & g_{\text{lb}} \leq g(x) \leq g_{\text{ub}} \end{aligned} \tag{1}$$

formuliert, wobei die vektorwertige Funktion  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  zusammen mit den Begrenzungen  $g_{\text{lb}}, g_{\text{ub}} \in \mathbb{R}^m$  die nichtlinearen Nebenbedingungen ausdrückt. Für dieses Übungsblatt werden wir die Hilfsumgebung Opti Stack<sup>2</sup> nutzen, welche eine Syntax bietet, die sehr nah an die Papiernotation angelehnt ist. Die so formulierten NLP werden automatisch in die Standardform (1) übertragen.

### Aufgaben:

1. Installieren Sie CasADi. Wenn sie Anaconda nutzen, aktivieren Sie zunächst das Environment, in dem Sie installieren wollen. Installieren Sie dort zunächst pip (`conda install pip`), gefolgt von der CasADi-Installation mit `pip install casadi`. Benutzen Sie standardmäßig pip, können sie CasADi direkt in Ihr gewünschtes Environment installieren.
2. Machen Sie sich mit den bereitgestellten Codebeispielen vertraut und führen diese aus. `puppy.py` enthält eine Implementierung der Bildrekonstruktion, die Sie bereits aus Übung 2 kennen. `chain.py` implementiert eine hängende Kette. Beide Beispiele werden in den folgenden Abschnitten kurz vorgestellt.

## Beispiel 1: Bildrekonstruktion

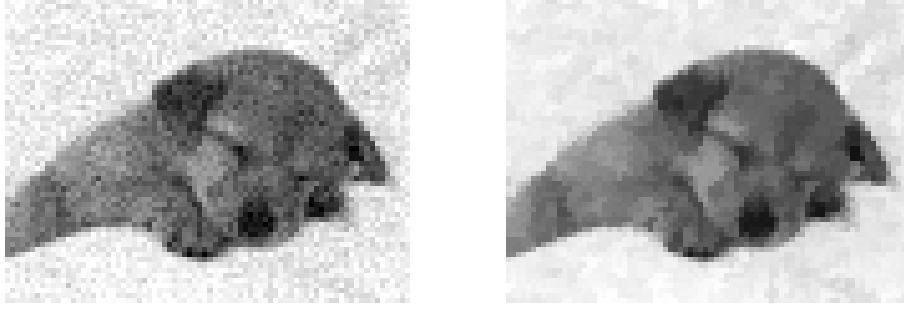
Wir haben ein verrauschtes schwarz-weiß Bild in Form der Matrix  $Y \in \mathbb{R}^{r \times c}$  gegeben, sodass die Elemente die Intensität der einzelnen Pixel definieren,  $0 \leq Y_{i,j} \leq 256$ . Ziel ist es, eine weniger verrauschte Version  $X \in \mathbb{R}^{r \times c}$  zu rekonstruieren. Dies kann als das unbeschränkte Optimierungsproblem

$$\min_{X \in \mathbb{R}^{r \times c}} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \left( \sqrt{(X_{i,j} - Y_{i,j})^2 + 1} + \alpha \sqrt{(X_{i,j} - X_{i+1,j})^2 + (X_{i,j} - X_{i,j+1})^2 + 1} \right) \tag{2}$$

---

<sup>1</sup><https://web.casadi.org>

<sup>2</sup><https://web.casadi.org/docs/#document-opti>



**Abbildung 1** – Beispiel einer durch Lösung von Problem (2) erhaltenen Rekonstruktion. Links: Verrauschtes Original  $Y$ . Rechts: Rekonstruierte Version  $X$  mit  $\alpha = 0.5$ .

formuliert werden. Hierbei haben wir “Phantompixel”  $X_{r+1,j}$  und  $X_{i,c+1}$  angenommen, mit  $X_{r+1,j} = X_{r,j}$  und  $X_{i,c+1} = X_{i,c}$ , um das Definieren der Summenindizes zu erleichtern. Abbildung 1 zeigt ein Beispiel einer so erhaltenen Rekonstruktion mit  $\alpha = 0.5$ .

## Beispiel 2: Hängende Kette

Wir betrachten eine Kette, bestehend aus  $N$  Massepunkten, die durch  $N-1$  Federn verbunden sind. Die Massepunkte haben Masse  $m$  und Positionen  $(y_i, z_i)$ , mit  $i \in \{0, \dots, N\}$ . Die beiden äußersten Massepunkte sind fixiert,  $(y_1, z_1) = (-2, 1)$  sowie  $(y_N, z_N) = (2, 1)$ . Wir wollen eine Ruheposition der Kette finden, was der Minimierung der Kettenenergie  $V(y, z)$  entspricht. Diese setzt sich zusammen aus der Lageenergie der Massen sowie der potentiellen Energie der Federn:

$$V(y, z) = \sum_{i=0}^N mgz_i + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} D \left( (y_i - y_{i+1})^2 + (z_i - z_{i+1})^2 \right), \quad (3)$$

wobei  $g$  die Erdbeschleunigung ist und  $D$  die Federkonstante. Wir führen nun zwei Variationen dieses Problems ein.

1. Unterhalb der Kette befindet sich eine ebene Fläche, die die Kette nach unten hin beschränkt. Dies drücken wir durch die Nebenbedingung  $z_i \geq 0$  aus.
2. Unterhalb der Kette befindet sich ein Hügel. Diesen drücken wir durch die Nebenbedingung  $z_i \geq -y_i^2$  aus.

Alles zusammen führt uns zu folgenden nichtlinearen Programmen:

### Variation 1

$$\min_{y, z \in \mathbb{R}^N} V(y, z) \quad (4a)$$

$$\text{s.t.} \quad (y_1, z_1) = (-2, 1), \quad (4b)$$

$$(y_N, z_N) = (2, 1), \quad (4c)$$

$$z_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq N \quad (4d)$$

### Variation 2

$$\min_{y, z \in \mathbb{R}^N} V(y, z) \quad (5a)$$

$$\text{s.t.} \quad (y_1, z_1) = (-2, 1), \quad (5b)$$

$$(y_N, z_N) = (2, 1), \quad (5c)$$

$$z_i \geq -y_i^2, \quad 1 \leq i \leq N \quad (5d)$$

Beachten sie, dass es sich bei NLP (4) um ein konvexes QP handelt (wieso?), während (5) ein nichtkonvexes NLP ist (wieso?). In `chain.py` finden Sie eine vollständige Implementierung beider Probleme hiervon. Abbildung 2 zeigt die Lösungen der beiden Variationen. Für Variation 2 sind zwei mögliche Lösungen dargestellt.

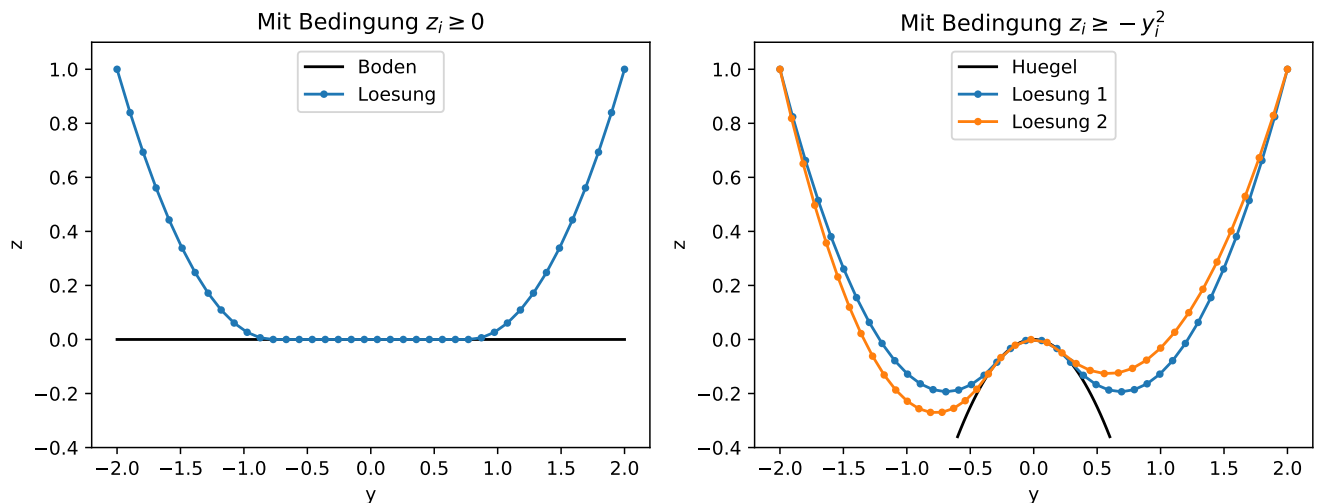


Abbildung 2 – Illustration der hängenden Kette in beiden Variationen.

## Aufgabe 1: Optimale Kreisplatzierung

Im Rahmen eines Produktionsprozesses sollen fünf Kreise,  $s_1, \dots, s_5$ , aus einer quadratischen Platte mit Kantenlänge  $a = 10$  cm ausgeschnitten werden. Drei dieser Kreise sollen den Radius  $R$  haben, die anderen beiden den Radius  $2R$ . Die Position eines Kreises  $s_i$  auf der Platte ist durch die Koordinaten  $(x_i, y_i)$  seines Mittelpunktes bestimmt. Ziel ist es, die Kreise so anzuordnen, dass der Radius  $R$  so groß wie möglich gewählt werden kann. Dabei muss sowohl sichergestellt werden, dass alle Kreise auf der Platte liegen, als auch dass sich diese nicht überschneiden. Eine Illustration der Situation ist in Abbildung 3 gegeben.

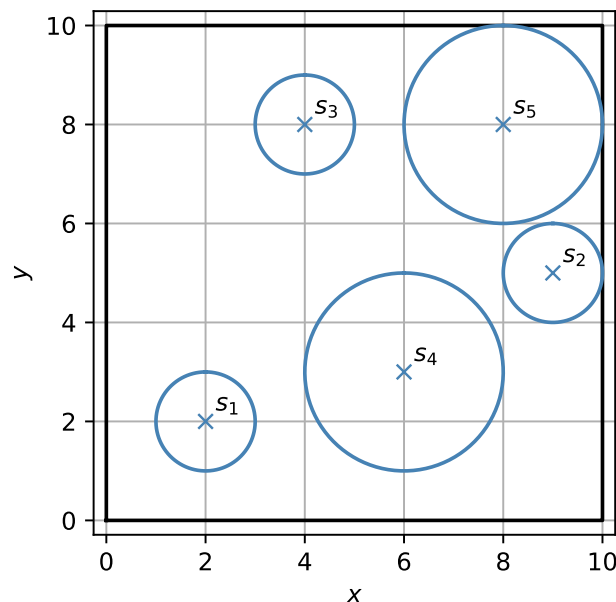


Abbildung 3 – Beispiel einer möglichen – aber nicht optimalen – Anordnung der Kreise.

Wir können dies als das folgende nichtlineare Optimierungsproblem ausdrücken:

$$\min_{\substack{R, x_1, \dots, x_5, \\ y_1, \dots, y_5}} -R \quad (6a)$$

$$\text{s.t.} \quad x_i - r_i(R) \geq 0, \quad i = 1, \dots, 5, \quad (6b)$$

$$x_i + r_i(R) \leq a, \quad i = 1, \dots, 5, \quad (6c)$$

$$y_i - r_i(R) \geq 0, \quad i = 1, \dots, 5, \quad (6d)$$

$$y_i + r_i(R) \leq a, \quad i = 1, \dots, 5, \quad (6e)$$

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \geq (r_i + r_j)^2, \quad i, j = 1, \dots, 5 \text{ mit } i < j \quad (6f)$$

mit  $r_i(R) = R$  für  $i \in \{1, 2, 3\}$  und  $r_i(R) = 2R$  für  $i \in \{4, 5\}$ .

## Aufgaben:

1. Diskutieren Sie kurz, ob das Problem konvex ist.

Intuition: Das Problem weist bestimmte Symmetrien auf. Wenn wir eine bestimmte Anordnung der Kreise als optimale Lösung  $x^*$  erhalten, können wir diese an der Achse  $x = a/2$  oder  $y = a/2$  spiegeln, um eine alternative Lösung  $\bar{x}$  zu erhalten, mit  $f(x^*) = f(\bar{x})$ . Anordnungen die “zwischen”  $x^*$  und  $\bar{x}$  liegen, dürften einen schlechteren Wert in der Zielfunktion haben bzw. nicht zulässig sein. Es muss sich also bei  $x^*$  und  $\bar{x}$  um getrennte lokale Optima handeln, also kann das Problem nicht konvex sein.

Alternativ: Für fixierte  $x_j, y_j, r_i, r_j$  definiert die Bedingung  $(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \geq (r_i + r_j)^2$  einen Kreis in der  $x_i$ - $y_i$ -Dimension (mit Radius  $r_i + r_j$ ), und fordert, dass Punkte  $(x_i, y_i)$  außerhalb dieses Kreises liegen. Die zulässige Region ist also nicht konvex.

Technisch: Nebenbedingung (6f) ist äquivalent zu

$$h_{ij}(x) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - (r_i + r_j)^2 \geq 0$$

Wenn  $h_{ij}$  konkav ist, dann handelt es sich bei der dadurch definierten Nebenbedingung um eine konvexe. Allerdings sehen wir, dass  $h_{ij}(x)$  z.B. in Richtung von  $x_i$  (im Schnitt  $x_j = y_i = y_j = 0$ ) als  $x_i^2$ , also strikt konvex, verläuft. Damit ist  $h_{ij}(x)$  nicht konkav, und das NLP nicht konvex.

2. Vervollständigen Sie das bereit gestellte Template, um das Optimierungsproblem mit CasADi und IPOPT zu lösen. Wie groß ist der Radius, den Sie erhalten?

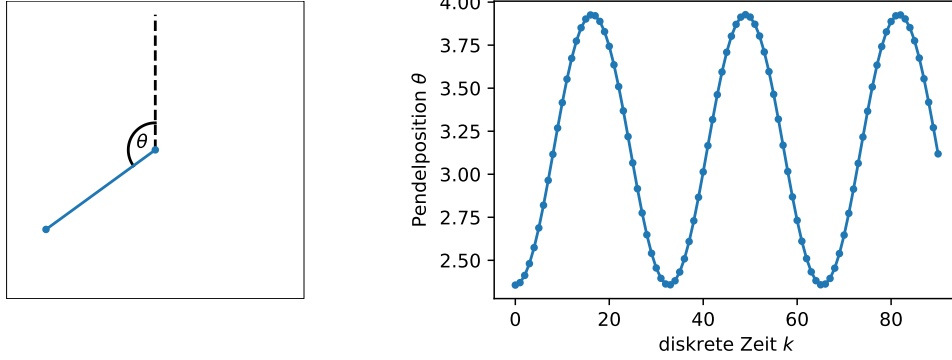
$$R = 1.303$$

3. Im Template war bereits eine konkrete Initialisierung der Entscheidungsvariablen gegeben. Verändern Sie diese, um mindestens eine bessere Lösung zu erhalten. Was ist die beste Lösung, die Sie finden können? Ist es möglich, dass es eine noch bessere gibt?

Da es sich um ein nicht konvexes NLP handelt, können wir im Allgemeinen nie wissen, ob wir das globale Optimum gefunden haben.

## Aufgabe 2: Optimale Steuerung eines Pendels

Wir betrachten ein Pendel. Dessen Position ist durch den Winkel  $\theta$  eindeutig bestimmt. Dabei entspricht  $\theta = \pi$  der Position, in der es gerade nach unten hängt. Eine Illustration finden Sie in Abbildung 4. In der Aufhängung des Pendels sitzt ein Motor, sodass es anhand eines Drehmoments  $u$  gesteuert werden kann. Die Winkelgeschwindigkeit ist  $\omega = \dot{\theta}$ . Fassen wir Position und Geschwindigkeit im Zustandsvektor  $x = [\theta \ \omega]^\top$  zusammen, können wir die Dynamik des Pendels durch die gewöhnliche Differentialgleichung (ordinary differential equation, ODE)



**Abbildung 4** – Links: Skizze des Pendels. Rechts: Trajektorie des Pendels mit Initialzustand  $x_0 = [\frac{3}{4}\pi \ 0]^\top$  und ohne Steuerung,  $u_k = 0 \ \forall k$ .

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = f(x, u) := \begin{bmatrix} \omega \\ \sin \theta + u \end{bmatrix} \quad (7)$$

beschreiben<sup>3</sup>.

Wir betrachten das Pendel über die Zeitdauer  $T$  und diskretisieren diese in  $N$  Zeitschritte. Zur Simulation verwenden wir das Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung (RK4)<sup>4</sup> und erhalten dadurch die diskretisierte Dynamik

$$x_{k+1} = F_h(x_k, u_k). \quad (8)$$

Hierbei ist  $x_k$  der Zustand zum diskreten Zeitpunkt  $k$ ,  $k \in \{0, \dots, N\}$ , und  $h := \frac{T}{N}$  der Integrationsschritt. Wir fassen die Zustände und die Steuerungsinputs zu allen Zeitpunkten in den Matrizen

$$X := [x_0 \ \dots \ x_N] \in \mathbb{R}^{2 \times N+1} \quad \text{und} \quad U := [u_0 \ \dots \ u_{N-1}] \in \mathbb{R}^{1 \times N} \quad (9)$$

zusammen. Unser Ziel ist es nun, das Pendel aus seiner herabhängenden Ruhelage  $\bar{x}_0 = [\pi \ 0]^\top$  zum Zeitpunkt  $k = 0$  in die aufrechtstehende Position  $\bar{x}_N = [0 \ 0]^\top$  zum Zeitpunkt  $k = N$  zu schwingen. Dabei wollen wir den Steuerungsaufwand  $L(U) := \sum_{k=0}^{N-1} u_k^2$  minimieren.

### Aufgaben:

1. Formulieren Sie unser Optimalsteuerungsproblem als nichtlineares Programm. Dabei sollen  $x_0, \dots, x_N$  und  $u_0, \dots, u_{N-1}$  die Entscheidungsvariablen sein. Die Nebenbedingungen sind die Dynamik, sowie die Start- und Zielposition.

$$\min_{\substack{x_0, \dots, x_N \in \mathbb{R}^2, \\ u_0, \dots, u_{N-1} \in \mathbb{R}}} \sum_{k=0}^{N-1} u_k^2 \quad (10a)$$

$$\text{s.t.} \quad x_0 - \bar{x}_0 = 0, \quad (10b)$$

$$x_{k+1} - F(x_k, u_k) = 0 \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (10c)$$

$$x_N - \bar{x}_N = 0 \quad (10d)$$

<sup>3</sup>Zur Vereinfachung haben wir hier alle Einheiten ignoriert. Eigentlich müsste vor den Sinus ein Faktor mit Einheit, da dieser dann mit dem Drehmoment summiert wird.

<sup>4</sup>[de.wikipedia.org/wiki/Klassisches\\_Runge-Kutta-Verfahren](https://de.wikipedia.org/wiki/Klassisches_Runge-Kutta-Verfahren)

2. Diskutieren Sie kurz, ob das Problem konvex ist.

Nein, wegen der nichtlinearen (bzw. nicht-affinen) Gleichheitsbedingungen (nichtlineare Dynamik).

3. Benutzen Sie das bereitgestellte Template, um das NLP mit CasADi und IPOPT zu lösen. Erstellen sie Plots der optimalen Trajektorien von  $\theta$ ,  $\omega$  und  $u$ , mit der diskreten Zeit  $k$  auf der  $x$ -Achse. Sie können ihre Lösung außerdem mit der bereitgestellten Animation (`pendulum.gif`) vergleichen.
4. Wir führen nun eine zusätzliche Beschränkung der Steuerung ein. Zu allen Zeitpunkten soll gelten:  $|u_k| \leq u_{\max}$ . Diskutieren Sie kurz, wie sich der optimale Wert der Zielfunktion dadurch verändert.

Durch zusätzliche Nebenbedingungen (d.h. Einschränkungen) kann sich der Wert der Zielfunktion nie verbessern, sondern nur verschlechtern oder gleichbleiben. In diesem Fall schneiden die zusätzlichen Bedingungen das vorherige optimale Steuerungsprofil an den Spitzen ab, deshalb ist es sehr wahrscheinlich, dass die zusätzliche Beschränkung zu einer Verschlechterung führt.

5. Erweitern Sie ihre NLP Formulierung um die zusätzliche Beschränkung. Beachten Sie, dass Sie hierbei die Betragsfunktion  $|\cdot|$  nicht verwenden sollten, da diese an der Stelle 0 nicht differenzierbar ist. Dies kann zu Problemen führen. Finden Sie stattdessen eine Umformulierung dieser Nebenbedingung.

$$\min_{\substack{x_0, \dots, x_N \in \mathbb{R}^2, \\ u_0, \dots, u_{N-1} \in \mathbb{R}}} \sum_{k=0}^{N-1} u_k^2 \quad (11a)$$

$$\text{s.t.} \quad x_0 - \bar{x}_0 = 0, \quad (11b)$$

$$x_{k+1} - F(x_k, u_k) = 0 \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (11c)$$

$$x_N - \bar{x}_N = 0, \quad (11d)$$

$$-u_{\max} \leq u_k \leq u_{\max} \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (11e)$$

6. Erweitern Sie Ihre Implementierung um die zusätzliche Nebenbedingung. Verwenden Sie  $u_{\max} = 0.13$ .