

Übungsgruppe: 1 Florian Messerer 2 Alexander Petrov 3 Franziska Gerhards 4 Peter Hofmeier

Name: _____ Matrikelnummer: _____ Punkte: / 9

Füllen Sie bitte Ihre Daten ein und machen Sie jeweils genau ein Kreuz bei der richtigen Antwort. Sie dürfen Extrapapier für Zwischenrechnungen nutzen, aber bitte geben Sie am Ende nur dieses Blatt ab. Richtige Antworten zählen 1 Punkt, falsche, keine oder mehrere Kreuze 0 Punkte.

1. Welches charakteristische Polynom $p_A(\lambda)$ hat das LTI-System $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx + Du$ mit den Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, C = [7 \quad 1] \text{ und } D = [0]?$$

- | | | | |
|--|--|--|--|
| (a) <input type="checkbox"/> $\lambda^2 - 7\lambda + 24$ | (b) <input checked="" type="checkbox"/> $\lambda^2 - 7\lambda$ | (c) <input type="checkbox"/> $\lambda^2 - 7$ | (d) <input type="checkbox"/> $\lambda^2 + \lambda$ |
|--|--|--|--|

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - 4)(\lambda - 3) - (-2 \cdot -6) = \lambda^2 - 7\lambda$$

2. Ein LTI-System wird durch die E/A-Differentialgleichung $3\ddot{y} + 3\dot{y} + 6y = 3\dot{u}$ beschrieben. Wie lautet das charakteristische Polynom $p_A(\lambda)$?

- | | | | |
|---|---|--|---|
| (a) <input type="checkbox"/> $2\lambda^3 + \lambda + 3$ | (b) <input checked="" type="checkbox"/> $\lambda^2 + \lambda + 2$ | (c) <input type="checkbox"/> $3\lambda^2 - 3\lambda - 6$ | (d) <input type="checkbox"/> $3\lambda^3 + 3\lambda^2 + 6\lambda - 3$ |
|---|---|--|---|

$$3\ddot{y} + 3\dot{y} + 6y = 3\dot{u} \Leftrightarrow \ddot{y} + \dot{y} + 2y = \dot{u} \\ \Rightarrow p_A(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 2$$

3. Bestimmen Sie die Polstellen des Systems, das durch folgende E/A-Differentialgleichung beschrieben wird: $2\ddot{y} - 18y = \ddot{u} - 9u$.

- | | | | |
|--|---|--|---|
| (a) <input type="checkbox"/> $\{-1/3, 1/3\}$ | (b) <input type="checkbox"/> $\{0, 9\}$ | (c) <input type="checkbox"/> $\{-9, 0\}$ | (d) <input checked="" type="checkbox"/> $\{-3, 3\}$ |
|--|---|--|---|

$$2\ddot{y} - 18y = \ddot{u} - 9u \Leftrightarrow \ddot{y} - 9y = \frac{1}{2}\ddot{u} - \frac{9}{2}u \\ \Rightarrow p_A(\lambda) = \lambda^2 - 9 \\ p_A(\lambda) \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \pm 3$$

4. Welches der folgenden vier Systeme beschreibt NICHT das gleiche Eingangs- Ausgangsverhalten wie $\ddot{y} - 3y = \dot{u}$?

- | | |
|--|---|
| (a) <input type="checkbox"/> $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \quad 0] x$ | (b) <input type="checkbox"/> $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u, \quad y = [0 \quad \frac{1}{2}] x$ |
| (c) <input checked="" type="checkbox"/> $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \quad 0] x$ | (d) <input type="checkbox"/> $-9y = 3\dot{u} - 3\ddot{y}$ |

$$\dot{x}_1 = x_2 - u, \quad \dot{x}_2 = -3x_1, \quad y = x_1 \\ \ddot{x}_1 = \dot{x}_2 - \dot{u} = -3x_1 - \dot{u} \\ \Rightarrow \ddot{y} + 3y = -\dot{u}$$

5. Welches der folgenden Systeme mit $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx + Du$ ist in der Ruhelage $x_{ss} = u_{ss} = 0$ asymptotisch stabil nach Lyapunov?

(a) <input type="checkbox"/> $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0], D = [0]$	(b) <input type="checkbox"/> $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [0 \ 1], D = [0]$
(c) <input type="checkbox"/> $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0], D = [0]$	(d) <input checked="" type="checkbox"/> $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [0 \ 1], D = [0]$

$$\begin{aligned}
\det(\lambda I - A) &= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda + 2 & -2 \\ 0 & \lambda + 1 \end{bmatrix}\right) \\
&= (\lambda + 2)(\lambda + 1) \\
&= \lambda^2 + 3\lambda + 2 \stackrel{!}{=} 0 \\
\lambda_{1,2} &= -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2} \\
\lambda_{1,2} &= -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \\
\lambda_1 &= -1 \\
\lambda_2 &= -2 \\
\Re(\lambda_{1,2}) < 0 &\Rightarrow \text{asymptotisch stabil}
\end{aligned}$$

6. Welches der folgenden vier Systeme ist nicht BIBO stabil? Jedes System ist durch seine Sprungantwort $h(t)$ beschrieben. T ist eine positive Konstante.

(a) <input type="checkbox"/> $e^{-t}(\cos t + \sin t)$	(b) <input type="checkbox"/> $e^{-t} - 5$	(c) <input checked="" type="checkbox"/> $1 - \cos \frac{t}{T}$	(d) <input type="checkbox"/> $\cos te^{-t}$
--	---	--	---

Es handelt sich um die Sprungantwort eines ungedämpften PT₂-Gliedes. Ungedämpfte Oszillation \Rightarrow nicht BIBO stabil

7. Welche Sprungantwort $h(t)$ mit $t > 0$ hat das System $2\dot{y} = \sqrt{u}$?

(a) <input type="checkbox"/> $\frac{1}{2}t^2$	(b) <input type="checkbox"/> $2t$	(c) <input type="checkbox"/> $t^{\frac{1}{2}}$	(d) <input checked="" type="checkbox"/> $\frac{1}{2}t$
---	-----------------------------------	--	--

$$u = 1 \Rightarrow \dot{y} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}t$$

8. Welche Impulsantwort hat das System $0.5\dot{y} + ky - u = 0$? k ist eine Konstante.

(a) <input type="checkbox"/> $2e^{2kt}$	(b) <input checked="" type="checkbox"/> $2e^{-2kt}$	(c) <input type="checkbox"/> $\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}kt}$	(d) <input type="checkbox"/> $1 - 2e^{2kt}$
---	---	--	---

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= -2ky + 2u \\
x = y &\Rightarrow \dot{x} = -2kx + 2u \\
\Rightarrow A &= [-2k], B = [2], C = [1], D = [0] \\
g(t) &= Ce^{At}B + D\delta(t) = 2e^{-2kt}
\end{aligned}$$

9. Welches der folgenden E/A-Systeme ist nicht BIBO stabil? T ist eine positive Konstante.

(a) <input type="checkbox"/> $\ddot{y} + 4\dot{y} + 5y = u$	(b) <input type="checkbox"/> $\dot{y} + 3y = \dot{u} + u$	(c) <input checked="" type="checkbox"/> $T^2\ddot{y} + y = u$	(d) <input type="checkbox"/> $\ddot{y} + 5\dot{y} + y = \ddot{u} + u$
---	---	---	---

PT₂-Glied ohne Dämpfung ist nicht BIBO stabil