Prüfung zur Systemtheorie und Regelungstechnik I, Universität Freiburg, SoSe 2016 (Prof. Dr. M. Diehl)

# Mikroklausur 1 am 13.5.2016

| Übungsgruppe: | 1 ☐ Florian Messerer | 2 ☐ Alexander Petrov | 3 ☐ Franziska Gerhards | 4 ☐ Peter Hofmeier |
|---|---|---|---|---|

Name: Matrikelnummer: Punkte: / 9

Füllen Sie bitte Ihre Daten ein und machen Sie jeweils genau ein Kreuz bei der richtigen Antwort. Sie dürfen Extrapapier für Zwischenrechnungen nutzen, aber bitte geben Sie am Ende nur dieses Blatt ab. Richtige Antworten zählen 1 Punkt, falsche -1/3 Punkt, keine oder mehrere Kreuze 0 Punkte.

1. Multiplizieren Sie $a = -3 - 3j$ mit $b = 1 - 2j$. Das Ergebnis ist gegeben durch:

| | | | |
|---|---|---|---|
| (a) ☐ $3 + 3j$ | (b) ☐ $9 + 3j$ | (c) ☒ $-9 + 3j$ | (d) ☐ $3 + 9j$ |

$$(-3 - 3j) \cdot (1 - 2j) = -3 + 6j - 3j + 6j^2 = -3 + 3j - 6 = -9 + 3j$$

2. Dividieren Sie $a = 3e^{-3\pi j}$ durch $b = 9e^{-2\pi j}$. Das Ergebnis ist gegeben durch:

| | | | |
|---|---|---|---|
| (a) ☒ $\frac{1}{3}e^{-\pi j}$ | (b) ☐ $3e^{-5\pi j}$ | (c) ☐ $\frac{1}{3}e^{5\pi j}$ | (d) ☐ $3e^{-\pi j}$ |

$$\frac{3e^{-3\pi j}}{9e^{-2\pi j}} = \frac{1}{3}e^{-3\pi j}e^{2\pi j} = \frac{1}{3}e^{-\pi j}$$

3. Bestimmen Sie das Produkt $A \cdot x$ von $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ und $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| (a) ☐ $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ | (b) ☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ | (c) ☒ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ | (d) ☐ $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ |

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot -2 \\ -3 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4. Multiplizieren Sie die beiden Matrizen $A_1$ und $A_2$ mit $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ und $A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| (a) ☐ $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ | (b) ☒ $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ | (c) ☐ $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ | (d) ☐ $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ |

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 \\ -1 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 & -1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

5. Wie lautet der Imaginärteil von $\frac{e^{jbt}}{e^{at}}$?

| | | | |
|---|---|---|---|
| (a) ☐ $j\sin(bt)$ | (b) ☒ $e^{-at}\sin(bt)$ | (c) ☐ $e^{-bt}\cos(at)$ | (d) ☐ $j\sin(bt)$ |

$$\frac{e^{jbt}}{e^{at}} = e^{-at}e^{(jbt} = e^{-at}(\cos(bt) + j\sin(bt)) = e^{-at}\cos(bt) + j \cdot e^{-at}\sin(bt)$$

6. Ein elektrischer Oszillator wird durch die beiden DGLs $\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{C}$ und $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{L}(v_E - iR - v_C)$ beschrieben. Nehmen Sie $x = \begin{bmatrix} v_C \\ i \end{bmatrix}$ als Zustand und $u = v_E$ als Eingang. Bringen Sie das System in die Form $\dot{x} = Ax + Bu$. Geben Sie $A$ und $B$ an.

| | |
|---|---|
| (a) ☒ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix}$ | (b) ☐ $A = \begin{bmatrix} -1/L & 0 \\ -R/L & 1/C \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix}$ |
| (c) ☐ $A = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}$ | (d) ☐ $A = \begin{bmatrix} 1/C & -R/L \\ 0 & -1/L \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}$ |

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \mathrm{d}v_C/\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}i/\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/C \cdot i + 0 \cdot v_C + 0 \cdot v_E \\ -R/L \cdot i - 1/L \cdot v_C + 1/L \cdot v_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} u$$

7. Die Temperatur der Flamme eines Bunsenbrenners wird durch $T$ beschrieben. Die Stärke der Flamme kann man durch das Drehen des Ventils regulieren, dabei ist der Drehwinkel $\omega > 0$ die Steuergröße. Die Temperatur der Flamme wird durch folgende Gleichung $\dot{T} = k_1\omega - k_2(T - T_0)^3$ angegeben, wobei $k_1$, $k_2$ und $T_0$ positive Konstanten sind. Wie groß ist die Temperatur $T_{\mathrm{SS}}$,

die sich bei einem konstanten Winkel $\omega_{\mathrm{SS}}$einstellt?

| | | | |
|---|---|---|---|
| (a) ☐ $\frac{k_1\omega_{ss}}{k_2}+T_0$ | (b) ☐ $\sqrt[3]{\frac{k_1\omega_{ss}+T_0}{k_2}}$ | (c) ☐ $k_1\omega_{ss}+T_0k_2$ | (d) ☒ $\sqrt[3]{\frac{k_1\omega_{ss}}{k_2}}+T_0$ |

$$f(x_{\mathrm{SS}},u_{\mathrm{ss}})\overset{!}{=}0 \quad \Rightarrow k_1\omega_{\mathrm{ss}}-k_2(T_{\mathrm{SS}}-T_0)^2=0$$
$$\Leftrightarrow T_{\mathrm{ss}}=\sqrt[3]{\frac{k_1\omega_{\mathrm{ss}}}{k_2}}+T_0$$

8. Welche Lösung $x(t)$ hat die Differentialgleichung $\dot{x}(t)=-2u(t)+x(t)$ mit dem Anfangswert $x(0)=2$?

| | |
|---|---|
| (a) ☐ $2e^t$ | (b) ☐ $-2u(t)+\int_0^t x(\tau)d\tau$ |
| (c) ☐ $2e^t-2e^t\int_0^t e^{\tau}u(\tau)d\tau$ | (d) ☒ $2e^t-2e^t\int_0^t e^{-\tau}u(\tau)d\tau$ |

$$x(t)=e^{At}x_0+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \text{ mit } A=1, B=-2, x_0=2$$
$$\Rightarrow x(t)=2e^t+\int_0^t e^{t-\tau}\cdot -2u(\tau)d\tau=2e^t-2e^t\int_0^t e^{-\tau}u(\tau)d\tau$$

9. Ein nichtlineares System ist durch die beiden Differentialgleichungen $\dot{x}_1=\sqrt{u}-x_2$ und $\dot{x}_2=\sin x_1$ beschrieben. Linearisieren Sie das System in der Gleichgewichtslage $u_{\mathrm{ss}}=4$ und $x_{\mathrm{ss}}=\begin{bmatrix}0 & 2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. Bringen Sie das linearisierte System in die Form $\dot{x}=Ax+Bu$, indem Sie $A$ und $B$ angeben.

| | |
|---|---|
| (a) ☒ $A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1/4\\ 0\end{bmatrix}$ | (b) ☐ $A=\begin{bmatrix}0 & -2\\ \pi & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}4\\ 0\end{bmatrix}$ |
| (c) ☐ $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$ | (d) ☐ $A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0\\ 1/4\end{bmatrix}$ |

$$f(x,u)=\begin{bmatrix}\sqrt{u}-x_2\\ \sin x_1\end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_{\mathrm{ss}},u_{\mathrm{ss}}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_{\mathrm{ss}},u_{\mathrm{ss}})\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_{\mathrm{ss}},u_{\mathrm{ss}}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_{\mathrm{ss}},u_{\mathrm{ss}})\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial u}(x_{\mathrm{ss}},u_{\mathrm{ss}})\\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(x_{\mathrm{ss}},u_{\mathrm{ss}})\end{bmatrix}$$
$$A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ \cos x_{\mathrm{ss1}} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$
$$B=\begin{bmatrix}\frac{1}{2\sqrt{u_{\mathrm{ss}}}}\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\ 0\end{bmatrix}$$