

## Übungsblatt 2: Modellierung und Simulation (zu Kapitel 2)

Prof. Dr. Moritz Diehl, Dr. Jörg Fischer

---

1. Wir möchten die Bewegung eines starren Körpers im dreidimensionalen Raum modellieren. Dabei sollen auf den Körper einwirkende Kräfte unmittelbar berücksichtigt werden. Welche Größen würden Sie bei der Modellierung als Zustände wählen? Wie nennt man ein solches Modell in der Mechanik? (1 Punkt)
2. Wofür steht die Abkürzung LTI und was sind LTI-Systeme? (1 Punkt)
3. Was ist eine Zustandstrajektorie? (1 Punkt)
4. Modellieren Sie die Temperatur  $T(t)$  (gemessen in K) und Wassermenge  $m(t)$  (in kg) in einem Waschbecken mittels einer Differentialgleichung der Form  $\dot{x} = f(x, u)$ . Am Anfang befindet sich im Waschbecken die Wassermenge  $m_0$  mit Temperatur  $T_0$ . Nun fließt heißes Wasser der konstanten Temperatur  $T_h$  mit variabler Massenflussrate  $u(t)$  (gemessen in kg/s) durch den Wasserhahn zu. Zudem gibt es einen Ausfluss, da der Stöpsel offen ist. Der Ausfluss habe die Massenflussrate  $k_1 \cdot \sqrt{m(t)}$ , wobei  $k_1$  eine positive Konstante mit Einheit  $\sqrt{\text{kg/s}}$  ist. Da das Wasser im Waschbecken zudem Wärmeenergie an die Umgebung abgibt, entstehen Wärmeverluste mit einer Wärmeverlustleistung von  $k_2 \cdot C \cdot m(t) \cdot (T(t) - T_0)$ , wobei  $k_2$  eine Konstante mit Einheit  $1/\text{s}$ , die Konstante  $C$  die spezifische Wärmekapazität des Wassers mit Einheit  $\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$  und  $T_0$  die Umgebungstemperatur ist. Skizzieren Sie das Waschbecken mit den ein- und ausgehenden Wasser- und Energieströmen, und finden Sie eine gewöhnliche Differentialgleichung der Form  $\dot{x} = f(x, u)$  mit

$$x = \begin{bmatrix} m(t) \\ T(t) \end{bmatrix}.$$

(Sie dürfen bei der Herleitung annehmen, dass die Masse  $m(t)$  immer strikt positiv bleibt.) (4 Punkte)

*Tip:* Nutzen Sie zur Herleitung von  $\dot{T}(t)$  den Energieerhaltungssatz, d.h. dass die Änderung der Wärmeenergie im Waschbecken der Differenz aus zugeführter und abgeführter Wärmeleistung entspricht. Die Wärmeenergie ist gegeben durch  $E(t) = C \cdot T(t) \cdot m(t)$ . Beachten Sie die Produktregel bei der Berechnung von  $\dot{E}(t)$ .

5. (MATLAB) Die folgenden Aufgaben sollen Sie mit ein paar grundlegende MATLAB-Befehlen vertraut machen. Eine Dokumentation der einzelnen Funktionen erhalten Sie über den Befehl `help` oder im Suchfenster rechts oben der MATLAB-Oberfläche. (3 Punkte)
  - (a) Das MATrix LABoratory (MATLAB) ist auf das Rechnen mit Matrizen und Vektoren ausgelegt. Erstellen Sie folgende Matrizen im Command Window:  
`a = [1, 2; 3, 4], b = 1:5, eye(3), ones(2, 5), zeros(size(b))`
  - (b) Berechnen Sie `a^2`, `b^2`, `a.^2`, `b.^2` im Command Window. Wieso funktioniert `b^2` nicht?
  - (c) Lesen Sie die erste Spalte von `a` mit Hilfe von `d = a(:, 1)` aus und berechnen Sie die Ausdrücke:  
`a*d`, `d*a`, `d'*a`
  - (d) Erstellen Sie ein Script, das einen Vektor `x` erzeugt, der die Zahlen 0 bis 10 in 0,1 Schritten in aufsteigender Reihenfolge enthält. Erzeugen Sie zudem einen Vektor `y` gleicher Dimension wie `x`, der den jeweiligen Sinuswert von `x` enthält.
  - (e) Erweitern Sie Ihr Script durch den Befehl `plot(x, y, 'rh--')`. Ändern Sie das Script, sodass der Plot aus einer durchgehenden schwarzen Linie mit Kreis-Markierungen besteht.
  - (f) Erstellen Sie eine Funktion `myfirstfunction` mit den Argumenten `a` und `b`, die den Sinus der Variable `b` berechnet und ausgibt. Verwenden Sie in der Funktion auch den Befehl `disp(['Hello ', a, ' World'])`; und testen sie Ihre Funktion im Command Window mit `myfirstfunction('MATLAB', 0)` und `myfirstfunction('numerical', pi)`. Wieso ist der Sinus von  $\pi$  nicht auch 0?