und

$$\det(\lambda I - J_k) = \det\left(\begin{bmatrix} (\lambda-\lambda_k) & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & (\lambda-\lambda_k) \end{bmatrix}\right) = (\lambda-\lambda_k)^{n_k},$$

dass

$$p_A(\lambda) = \Pi_{k=1}^{r}(\lambda-\lambda_k)^{n_k}.$$

Wir haben hier wegen der Annahme der Steuerbarkeit annehmen dürfen, dass es zu jedem Eigenwert $\lambda_k$ der Matrix $A$ nur einen einzigen Jordanblock gibt.

Wegen eines Zusammenhangs mit den Polstellen der sogenannten "Übertragungsfunktion", den wir in Kapitel 6 erläutern werden, werden die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, die zugleich die Eigenwerte der Systemmatrix sind, auch oft "Polstellen der Übertragungsfunktion" genannt, oder kurz "Polstellen". Wir werden in diesem Skript ab jetzt sogar aktiv vermeiden, den (mathematisch völlig korrekten) Ausdruck "Nullstellen des charakteristischen Polynoms" für die Eigenwerte/Polstellen eines Systems zu gebrauchen, um Verwirrung zu vermeiden, da in der Systemtheorie eine andere Form von "Nullstellen" - nämlich die Nullstellen des Zählerpolynoms der Übertragungsfunktion - auch eine große Rolle spielen werden.

## 4.4 Zustandsstabilität

Eine wichtige Eigenschaft eines dynamischen Systems ist, ob es stabil ist oder nicht. Vereinfacht kann man sagen, dass ein System stabil ist, wenn es auf eine *beschränkte* Erregung mit einer *beschränkten* Bewegung reagiert. Was hierbei unter „Erregung“ verstanden werden kann, hängt von dem konkreten System und der betrachteten Fragestellung ab. So kann man eine beschränkte Erregung als ein begrenztes Eingangssignal interpretieren, das am Systemeingang anliegt und das System aktiv anregt. Diese Betrachtungsweise führt zu dem Konzept der so genannten *Eingangs-Ausgangsstabilität* (BIBO-Stabilität), die in Abschnitt 5.3 noch eingehend betrachtet werden wird. Die Anfangsauslenkung eines Systems aus der Ruhelage stellt eine weitere Form der Erregung eines System dar. Stabilität bedeutet in diesem Zusammenhang, dass sich das System durch die resultierende Eigenbewegung nicht „zu weit“ von der Ruhelage entfernt. Diese Betrachtungsweise führt uns zum wichtigen Konzept der *Zustandsstabilität*, das in diesem Kapitel vorgestellt wird.[1]

Gegenstand der Zustandsstabilität sind die Ruhelagen eines ungestörten Systems. Ungestört meint, dass die betrachteten Systeme entweder keinen Eingang besitzen oder dass alle Eingangssignale konstant sind ($u(t) = u_{\mathrm{ss}}$). Für den uns hier interessierenden Fall linearer zeitinvarianter SISO Systeme bedeutet dies, dass sich das betrachtete System durch eine Differentialgleichung der Form

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{(n-1)} y}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \ldots a_1\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a_0 y = b_0 u_{\mathrm{ss}}$$

[1]Große Teile dieses Abschnitts wurden von Jörg Fischer erstellt, der auch angeregt hat, dieses wichtige Thema dem Kurs hinzuzufügen.

mit Anfangsbedingung

$$\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}t^{n-1}}(0) = y_{0n}, \quad \ldots, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) = y_{02}, \quad y(0) = y_{01}$$

darstellen lässt. Dies ist äquivalent zu einem Zustandsraummodell

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_{\mathrm{ss}} \quad \text{und} \quad y(t) = Cx(t)$$

mit passenden Matrizen $A$ und $C$ und entsprechender Anfangsbedingung $x(0) = x_0$. Für Zustandsstabilität interessiert uns nur die Entwicklung des Zustands $x(t)$, ganz unabhängig davon, welche Werte der Ausgang $y(t)$ annimmt. Es interessiert uns also nur die Differentialgleichung $\dot{x} = Ax+Bu_{\mathrm{ss}}$, oder, ganz allgemein für ein nichtlineares System ohne Störung und mit konstanter Steuerung, $\dot{x} = f(x, u_{\mathrm{ss}})$. Eine Ruhelage dieses Systems ist ein Zustand, in dem das System in Ruhe ist, d.h. $\dot{x} = 0$ gilt. Für eine Ruhelage $x_{\mathrm{ss}}$ folgt somit

$$0 = f(x_{\mathrm{ss}}, u_{\mathrm{ss}}) \ .$$

Für lineare Systeme gilt also

$$0 = Ax_{\mathrm{ss}} + Bu_{\mathrm{ss}}$$

.

In dieser Darstellung erkennt man, dass lineare Systeme in Abhängigkeit von der Systemmatrix $A$ entweder exakt eine Ruhelage besitzen (nämlich $x_{\mathrm{ss}} = -A^{-1}Bu_{\mathrm{ss}}$) oder unendlich viele Ruhelagen.

Man bezeichnet eine Ruhelage eines Systems als *zustandsstabil*, wenn das System bei ausreichend kleiner Auslenkung aus der Ruhelage in der Nähe dieser Ruhelage bleibt. Die mathematische Definition dieses Konzepts geht auf den russischen Mathematiker Alexander Michailowitsch Lyapunov (1857- 1918) zurück, weshalb Zusstandsstabilität häufig auch als Lyapunov-Stabilität bezeichnet wird.

**Definition 1 (Zustandsstabilität (Lyapunov-Stabilität))** *Die Ruhelage $x_{\mathrm{ss}}$ eines Systems heißt stabil (im Sinne von Lyapunov) oder zustandsstabil, wenn für jedes $\epsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ existiert, so dass für jeden beliebigen Anfangszustand $x_0$, der die Bedingung*

$$\|x_0 - x_{\mathrm{ss}}\| < \delta \tag{4.4}$$

*erfüllt, die Eigenbewegung des Systems die Bedingung*

$$\|x(t) - x_{\mathrm{ss}}\| < \epsilon \qquad \textit{für alle} \quad t > 0 \tag{4.5}$$

*erfüllt. Die Ruhelage heißt asymptotisch stabil, wenn sie stabil ist und ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $\|x_0 - x_{\mathrm{ss}}\| < \delta$ die Trajektorie gegen $x_{\mathrm{ss}}$ konvergiert, also*

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = x_{\mathrm{ss}} \tag{4.6}$$

*gilt.*

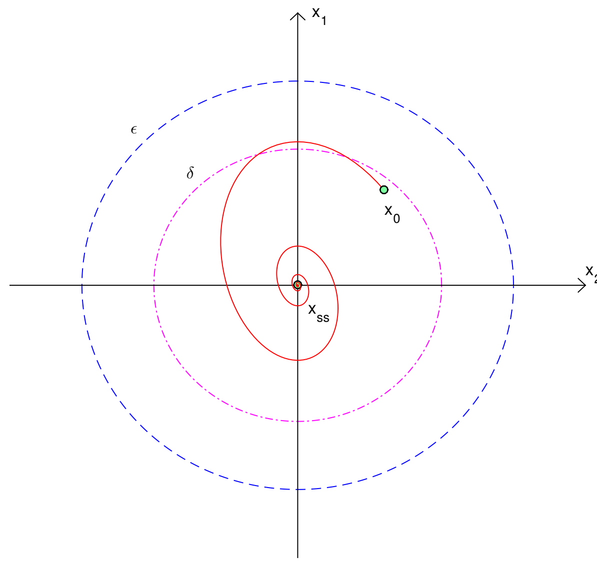


Abbildung 4.1: Veranschaulichung des Begriffs der Zustandsstabilität anhand einer Beispieltrajektorie eines zustandsstabilen $\mathrm{PT}_2$-Gliedes. Der Anfangszustand $x_0$ liegt innerhalb der Kugel mit Radius $\delta$. Die Zustandstrajektorie bleibt zu jeder Zeit innerhalb der Kugel mit Radius $\epsilon$.

Die Definition mag zunächst ein wenig ungewöhnlich wirken. Sie hat allerdings den Vorteil, dass auf elegante Weise vermieden wird festzulegen welche Entfernung von der Ruhelage als "in der Nähe" empfunden wird. Die Idee hinter der Definition ist zu fragen, ob zu jedem beliebigen Gebiet im Zustandsraum, das die Ruhelage enthält, ein kleineres Gebiet existiert, so dass das größere Gebiet nie verlassen wird wenn das System innerhalb des kleineren Gebiets startet. Die Abbildung 4.1 soll diesen Zusammenhang weiter veranschaulichen. Dargestellt ist die Zustandstrajektorie eines stabilen $\mathrm{PT}_2$-Gliedes, das in dem Zustand $x_0$ startet. Gemäß der obigen Definition denken wir uns zunächst eine Kugel mit Radius $\epsilon$ um die Ruhelage $x_{\mathrm{ss}} = 0$ des $\mathrm{PT}_2$-Gliedes. Nun fragen wir uns, ob es eine kleinere Kugel (mit Radius $\delta$) gibt, so dass das System nie die $\epsilon$-Kugel verlassen kann, wenn es innerhalb der $\delta$-Kugel startet. Existiert für jede erdenkliche $\epsilon$-Kugel um die Ruhelage eine solche $\delta$-Kugel, dann ist die Ruhelage $x_{\mathrm{ss}}$ zustandsstabil.

Wenn ein System genau eine Ruhelage besitzt, ist es auch üblich, an Stelle von der Stabilität der Ruhelage von der Stabilität des Systems zu sprechen.

## 4.5 Stabilität bei negativem Realteil aller Polstellen

Wir werden im Folgenden zeigen, dass die Zustandsstabilität einer Ruhelage eines LTI Systems von den Eigenwerten der Systemmatrix $A$ abhängt. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit betrachten wir uns auf den Fall $u_{\mathrm{ss}} = 0$. Die Eigenwerte von $A$ entsprechen, wie im vorherigen Kapitel beschrieben, genau den $n$ Lösungen $\lambda_k$ des charakteristischen Polynoms

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots a_1\lambda + a_0 = 0 \; .$$

Sind die Eigenwerte (Polstellen) eines LTI Systems bekannt, können wir zwei sehr starke Aussagen über die Zustandsstabilität der Ruhelage $x_{\text{ss}} = 0$ treffen:

1. Die Ruhelage $x_{\text{ss}} = 0$ ist asymptotisch stabil, wenn alle Polstellen des Systems einen negativen Realteil haben, d.h.

$$\text{Re}\{\lambda_k\} < 0 \qquad \text{für alle } k \in 1, 2, \ldots, n \; .$$

2. Die Ruhelage $x_{\text{ss}} = 0$ ist instabil, wenn mindestens eine Polstelle einen positiven Realteil hat, d.h.

$$\text{Re}\{\lambda_k\} > 0 \qquad \text{für ein } k \in 1, 2, \ldots, n \; .$$

Zum Beweis der ersten Aussage werden wir zeigen, dass, falls die Realteile aller Eigenwerte negativ sind, ein $M \in \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$\|x(t)\| \leq M\|x_0\|.$$

Die Motivation ist, dass man dann für jedes $\epsilon$ die Zahl $\delta = \epsilon/M$ wählen kann. Wir zeigen diese Aussage mit Hilfe der Zustandsraumdarstellung, für die der folgende explizite Ausdruck für den Zustand $x(t)$ gilt:

$$x(t) = e^{At}x_0 \; . \tag{4.7}$$

Durch Transformation von $A$ auf Jordan-Form $A = TJT^{-1}$ erhalten wir wegen

$$e^{TJT^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(TJT^{-1})^k}{k!} = T\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(J)^k}{k!}T^{-1}$$

daraus den äquivalenten Ausdruck

$$x(t) = Te^{Jt}T^{-1}x_0 \; . \tag{4.8}$$

Wir müssen jetzt nur noch zeigen, dass die Norm dieser Matrix

$$\|x(t)\| = \underbrace{\|T\|\|e^{Jt}\|T^{-1}\|}_{<M}\|x_0\|.$$

eine obere Grenze hat. Dies ist gleichbedeutend damit, dass die Matrix $e^{Jt}$ eine obere Grenze hat, da die Norm von $T$ und $T^{-1}$ konstant und begrenzt ist.

Da die Matrix $J$ blockdiagonal ist und in Jordanblöcke $J_k$ zerlegt werden kann, und die Matrix-Exponentialfunktion auf alle Diagonalblöcke separat wirkt, gilt

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & & & \\ & e^{J_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{J_r t} \end{bmatrix} ,$$

wobei $e^{J_k t} \in \mathbb{C}^{n_k \times n_k}$. Wir können also das Verhalten jedes Jordanblock-Subsystems separat behandeln. Analysieren wir jetzt also das Verhalten eines solchen Blocks $e^{J_k t}$ mit Jordanblock $J_k$ für ein beliebiges $k \in \{1, \ldots, r\}$. Hierfür ist es hilfreich, die Matrix $J_k$ in zwei Teile zu zerlegen:

$$J_k = \lambda_k I + N_k \quad \text{mit} \quad N_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix},$$

wobei $N_k \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}$. Man berechnet leicht, dass

$$N_k^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix}, \quad N_k^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix}, \quad \text{etc.}$$

gilt, und dass $N_k^{n_k} = 0$. Damit ergibt sich der folgende Ausdruck für $e^{N_k t}$:

$$e^{N_k t} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{(n_k-1)}}{(n_k-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \frac{t^2}{2} \\ & & & & t \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Zudem lässt sich leicht anhand der Definition des Matrixexponentials überprüfen, dass gilt:

$$e^{\lambda_k I t} = e^{\lambda_k t} I \ .$$

Es ergibt sich damit

$$e^{\lambda_k I t + N_k t} = e^{\lambda_k I t} e^{N_k t} = e^{\lambda_k t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{(n_k-1)}}{(n_k-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \frac{t^2}{2} \\ & & & & t \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Man beachte, dass alle Einträge der Matrix nur aus Termen der Form $e^{\lambda_k t}$, $e^{\lambda_k t} t, \ldots, e^{\lambda_k t} t^{(n_k-1)}$ bestehen, also Produkten der Exponentialfunktion $e^{\lambda_k t}$ mit Polynomen vom Grad kleiner als $n_k$. Ist nun der Realteil von $\lambda_k$ negativ, dann konvergiert die Funktion $e^{\lambda_k t}$ schneller gegen Null als jedes Polynom, und es gilt

$$\lim_{t \to \infty} \|e^{J_k t}\| = 0.$$

Sind also die Realteile aller Polstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ negativ, dann gilt auch $\lim_{t\to\infty} \|e^{Jt}\| = 0$. Damit ist sowohl gezeigt, dass $\|e^{Jt}\|$ eine obere Grenze hat, das System also Lyapunov-stabil ist, als auch, dass alle Trajektorien gegen Null konvergieren, es also zusätzlich asymptotisch stabil ist.

Hat umgekehrt nur einer der Eigenwerte einen positiven Realteil, dann wächst die Matrix $e^{At}$ über alle Grenzen, und damit bei beliebig kleinem $x_0$, das in der Richtung des entsprechenden Eigenvektors liegt, auch $x(t) = e^{At}x_0$: das System ist instabil. Damit sind unsere beiden Aussagen oben bewiesen.

Ein Spezialfall tritt ein, wenn der Realteil eines Eigenwertes bzw. einer Polstelle gleich Null ist. Ob die Ruhelage stabil oder instabil ist, hängt dann von der Struktur der Matrix $A$ ab:

- Ist die Matrix diagonalähnlich, d.h. sind alle Eigenvektoren linear unabhängig, ist die Ruhelage stabil, aber nicht asymptotisch stabil. In diesem Fall bezeichnet man die Ruhelage auch als **grenzstabil**, da die Ruhelage zwar zustandsstabil ist, das System nach einer Auslenkung allerdings auch nicht in die Ruhelage zurückkehrt. Beispiele für ein grenzstabiles System sind das Integrator-Glied und das ungedämpfte $\mathrm{PT}_2$-Glied (mit $d = 0$). Interessant ist, dass der einfache Integrator in jedem Zustand eine Ruhelage hat und dort grenzstabil ist.

- Ist die Matrix nicht-diagonalähnlich und es gibt mindestens einen Jordanblock $J_k$ der Größe $n_k \geq 2$, dessen Eigenwert $\mathrm{Re}\{\lambda_k\} = 0$ , so ist die Ruhelage instabil. Ein Beispiel hierfür ist ein System, das aus zwei in Reihe geschalteten Integratoren besteht (Doppelintegrator). Eine Anfangsauslenkung des ersten Integrators aus dem Nullzustand führt zu einem von Null verschiedenen Signal an dessen Ausgang. Dieses wird vom zweiten Integrator beständig aufintegriert. Die Ruhelage $x_{\mathrm{ss}} = 0$ des Doppelintegrators ist somit nicht stabil.

Die in diesem Abschnitt dargestellten Ergebnisse kann man auch über die Eingangs-Ausgangsdifferentialgleichung herleiten. Dabei macht man den Lösungsansatz $y(t) = y_0 e^{\lambda t}$. Man sieht, dass dieser Ansatz für jede Nullstelle $\lambda$ des charakteristischen Polynoms tatsächlich eine Lösung liefert, denn:

$$
\begin{aligned}
& \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n}(t) + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{(n-1)} y}{\mathrm{d}t^{n-1}}(t) + \ldots a_1 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) + a_0 y(t) \\
= \; & y_0 e^{\lambda t}[\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots a_1\lambda + a_0] \\
= \; & 0.
\end{aligned}
$$

Man sieht daran zum Beispiel, dass eine einzige Polstelle $\lambda_1$ mit positivem Realteil eine Lösung $y_0 e^{\lambda_1 t}$ zulässt, die exponentiell wächst.[2]

[2] Um alle möglichen Lösungen zu analysieren, was zum Beweis der Stabilität nötig wäre, kann man die Tatsache verwenden, dass jede mögliche Lösung die Form $y(t) = c_0 t^m e^{\lambda t}$ hat, mit geeignetem $m \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ und $c_0 \in \mathbb{C}$, und diesen Ausdruck dann in die Differentialgleichung einsetzen.